

А.Х. Шахмейстер

ТРИГОНОМЕТРИЯ



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Тригонометрия

**ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ**



**С.-Петербург
Москва
2014**

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано:

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия
для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш 32 Тригонометрия : Учеб. пособие. — 4-е изд. —
СПб.: «Петроглиф» : М.: Изд-во МЦНМО : ИД КДУ, 2014.
— 750 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-042-2,
ISBN 978-5-4439-0050-6, ISBN 978-5-906226-15-0.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения
школьного курса математики, содержит большое количество раз-
ноуровневого тренировочного материала. В книге представлена
программа для проведения элективных курсов в профильных
и предпрофильных классах.

Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов,
студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-98712-042-2 («Петроглиф») УДК 373.167.1:512
ISBN 978-5-4439-0050-6 (Издательство МЦНМО) ББК 22.141я71.6
ISBN 978-5-906226-15-0 (ИД КДУ)

© Шахмейстер А. Х., 2014
© ООО «Петроглиф», 2014
© ИД КДУ, 2014

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие редактора.

Перед вами энциклопедическая по своей сути книга по тригонометрии из серии «Элективные курсы». Четкая структура книги позволяет быстро найти материал по интересующему вас разделу. Удивительно разнообразный и разноуровневый подбор примеров и задач является уникальной кладовой педагогического и методического опыта преподавания сложных тем курса тригонометрии в школе. Особенно хотелось бы выделить тщательность и аккуратность разработки следующих трудных тем: периодичности, обратных тригонометрических функций и их графиков, тригонометрических уравнений и неравенств.

Это прекрасный самоучитель для тех кто только начинает или хочет глубже разобраться в курсе тригонометрии. Наличие большого количества разноплановых примеров и графиков позволит учащемуся «прочувствовать» сложные понятия и нестандартные идеи, «увидеть» их естественное применение.

Ценность книги заключается в том, что с рассмотренными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий и идей тригонометрии. Естественно, многие идеи, заложенные в систему примеров, тренировочных самостоятельных, карточек заданий, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам и олимпиадам.

Желательно, чтобы подготовительная работа к изучению тригонометрии началась уже в 8 классе с изучения книги этой же серии «Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия».

А. В. Семенов.

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса №1
для учащихся 9–11 классов (30 уроков).**

№ № уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–8	Определения основных тригонометрических функций. Вычисление значений тригонометрических функций любого угла (стр. 7–68) Практикум 1 (1.1, 1.2, 3.2, 5.2, 5.3, 7.1, 7.3, 7.5, 7.8) Практикум 2 (1 – выборочно, 3 – выборочно, 6 – выборочно) Тренировочная работа 1 (2, 4, 6 – выборочно) Практикум 3 (1.1, 1.3, 2.2, 2.3, 3.2, 4.1, 4.2, 4.4, 4.5) Тренировочная работа 2 (1.1, 1.3, 2.3, 3.2, 4.1, 4.3) Практикум 4 (1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.3) Тренировочная работа 4 (1.3, 1.5, 2.2, 2.4, 3.2, 4.1, 4.4)
9–13	Решение простейших уравнений (стр. 69–88) Практикум 5 (2.3, 3.3, 3.5, 3.6, 4.2, 4.4, 4.7, 4.8)
14–18	Формулы приведения (стр. 89–105) Практикум 6 (1.1, 1.3, 2.1, 2.4, 2.6, 2.11, 2.14, 2.17, 2.18, 3.1, 3.4)
19–23	Теоремы сложения (стр. 116–134) Практикум 7 (1.1, 1.3, 2.1, 2.3, 2.4, 3.2, 3.4, 5.1, 5.2, 5.5) Тренировочная работа 6 (1.2, 1.3, 2.2, 2.4, 3.3, 3.4, 4.2, 5.2, 5.5)
24–30	Тригонометрические функции двойного и половинного угла (стр. 135–162) Практикум 8 (1.2, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 2.2, 2.3, 3.1, 4.1, 4.3, 4.6) Тренировочная работа 7 (1.3, 1.4, 1.7, 2.2, 2.3, 3.1, 4.1, 4.3, 4.5) Тренировочная работа 8 (1.3, 1.5, 1.7, 2.3, 2.4) Тренировочная 9 (1, 6, 8, 11, 12)

Программа элективного курса №2
для учащихся 9–11 классов (40 уроков).

№ №. уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–4	Основные тригонометрические формулы (стр. 163–211) Тренировочная работа 10 (8, 9, 10, 15) Тренировочная работа 11 (4, 7, 13, 17, 18) Тренировочная работа 12 (6, 8, 9, 10) Тренировочная работа 15 (2.1, 3.1, 3.2, 3.3)
5–6	Периодические функции (стр. 263–285) Практикум 11 (3.1, 3.2, 3.7, 3.10, 4)
7–12	Обратные тригонометрические функции (стр. 286–321) Практикум 12 (1, 3, 4, 5, 6) Практикум 13 (1.2, 1.6, 2.1, 2.2) Практикум 14 (1, 2, 3, 5, 7, 8) Тренировочная работа 17 (6, 8, 11)
13–20	Свойства аргс-функций. Графики аргс-функций (стр. 322–389) Практикум 15 (1.1, 1.3, 1.6, 2, 3, 5) Тренировочная работа 18 (1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.5, 2.8, 2.10, 2.12) Практикум 16 (2.1, 2.3, 2.4, 2.5) Тренировочная работа 19 (1.1, 1.4, 1.8, 2.1, 2.5, 2.7, 3.1, 3.2)
21–24	Системы тригонометрических уравнений (стр. 390–405) Практикум 17 (1, 3, 6, 8) Практикум 18 (1, 3, 4, 6, 8)

Программы разработаны по материалам книги и апробированы на практике Заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Определение основных тригонометрических функций

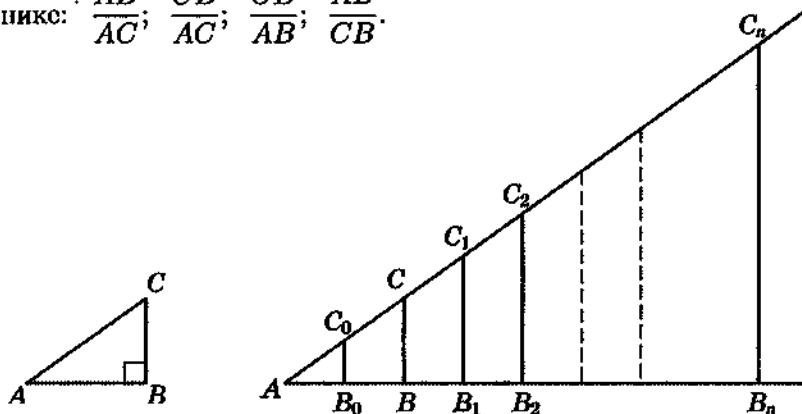
Введение

Тригонометрия — слово греческое, в переводе означает измерение треугольников. Термин этот ввел еще в 1595 г. немецкий богослов-математик Варфоломей Питиск, автор учебника и тригонометрических таблиц. Но первые сведения по тригонометрии были известны еще из клинописных таблиц Древнего Вавилона. Более серьезные результаты получил Гиппарх из Никси (II в. до н.э.). Эти сведения вошли в «Альмагест» — 13 книг по математике Клавдия Птолемея (II в. до н.э.). Термины «синус» и «косинус» пришли к нам от индийских математиков XI в.

Наибольшее влияние на развитие тригонометрии оказал «Трактат о полном четырехугольнике» Насирэддина ат-Туси, азербайджанского астронома-математика (1201–1274). Далее — это работы Иоганна Мюллера (Регiomонтан) (1436–1476), сыгравшие в этом вопросе в европейской математике решающую роль. Затем — работы Франсуа Виета (1540–1603) с теорией косинусов и формулами кратных углов, Исаака Ньютона (1643–1727) с представлением тригонометрических функций в виде рядов. И, наконец, работы Леопарда Эйлера (1707–1783), обнаружившего связь между тригонометрическими функциями и комплексными числами.

Обычно знакомство с тригонометрическими функциями начинается с определения отношений в прямоугольном треугольнике:

$$\text{пикс: } \frac{AB}{AC}; \frac{CB}{AC}; \frac{CB}{AB}; \frac{AB}{CB}.$$



Учитывая подобие треугольников, имеем

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_0C_0 \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \dots \sim \triangle AB_nC_n.$$

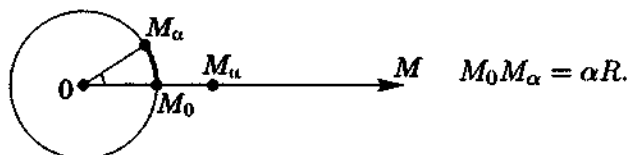
Оказывается, эти отношения не зависят от линейных размеров сторон треугольника. Значит, эти отношения — какая-то очень существенная количественная характеристика, в данном случае — угла. Итак, данному углу мы будем сопоставлять конкретное число, выраженное отношением сторон прямоугольного треугольника:

$$\sin(\angle A) = \frac{CB}{AC}; \quad \cos(\angle A) = \frac{AB}{AC};$$

$$\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{BC}{AB}; \quad \operatorname{ctg}(\angle A) = \frac{AB}{BC}.$$

Далее произошло расширение тригонометрической характеристики не только острого угла прямоугольного треугольника, но и характеристики острого угла произвольного треугольника, а затем характеристики угла в пределах $0^\circ \leq \angle A \leq 360^\circ$ и, наконец, рассмотрение тригонометрических отношений любого угла.

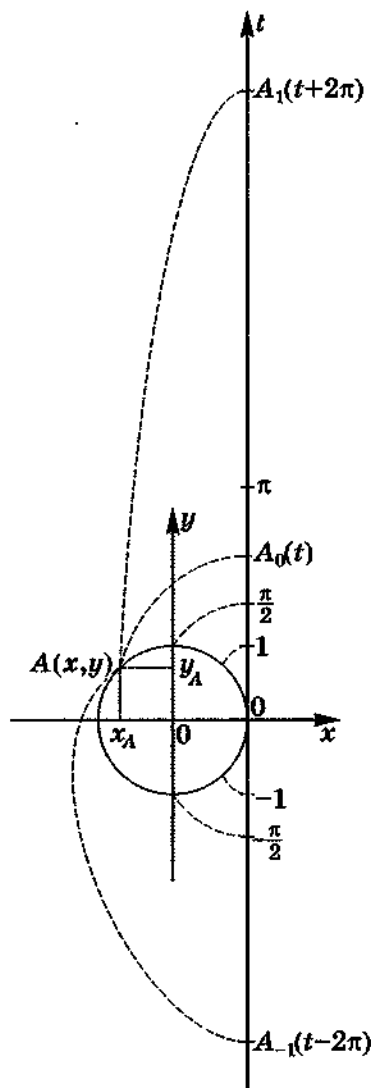
Рассмотрим единичную окружность и на ней фиксированную точку M_0 (радианное измерение), причем $\sphericalangle M_0 M_\alpha = \alpha R$.



Длина дуги, образованной углом в α радиан на окружности радиусом R , равна αR , и для единичной окружности длина дуги и величина угла в радианах совпадают. Отображение луча на окружность против часовой стрелки (положительные углы) называют «намоткой». Таким образом, мы сопоставили значение отрезка $M_0 M_\alpha$ углу α , а значит можем дать определение тригонометрических отношений любого угла.

Примечание (тригонометрические функции числового аргумента). Традиционно аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины — углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций как отношения отрезков являются абстрактными величинами — числами. При изучении тригонометрических функций необходимо сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента. Сравнивать же можно только однородные или, что точнее, абстрактные величины — числа. Поэтому введение тригонометрических функций числового аргумента даст возможность применять эти функции в математике, технике, физике и т.д. Понятие тригонометрической функции числового аргумента можно ввести следующим способом.

В координатной плоскости xOy построим единичную окружность, а числовую ось t расположим так, чтобы она касалась единичной окружности в точке ее пересечения с положительной полуосью абсцисс $(1; 0)$. За начало оси t возьмем точку касания, а масштабную единицу выберем такую же, как и в системе координат xOy .



одна точка $A(x, y)$ единичной окружности.

По определению тогда можно положить:

$$\begin{aligned} y &= \sin t; & \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} t; & \frac{1}{x} &= \operatorname{sec} t; \\ x &= \cos t; & \frac{x}{y} &= \operatorname{ctg} t; & \frac{1}{y} &= \operatorname{cosec} t. \end{aligned}$$

Представим себе, что числовую ось t намотали на единичную окружность: положительную полуось против движения часовой стрелки, а отрицательную полуось t — по движению часовой стрелки. Пусть при этом наматывании точка $A_0(t)$ числовой оси совпадает с точкой $A(x, y)$ единичной окружности. Так как при единичном радиусе $R = 1$ длина окружности равна 2π , то при первом витке точка $A_1(t + 2\pi)$ совпадает с точкой $A(x, y)$, после второго витка точка числовой оси $A_2(t + 4\pi)$ совпадет с точкой $A(x, y)$ и т.д. Получается, что $A_n(t + 2\pi n)$ совпадает с точкой $A(x, y)$.

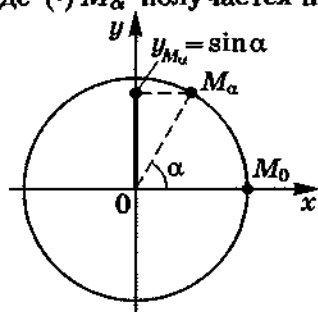
Аналогично при наматывании отрицательной полуоси t точка $A_{-1}(t - 2\pi)$ совпадает с точкой $A(x, y)$ (первый виток), точка $A_{-2}(t - 4\pi)$ также совпадает с точкой $A(x, y)$ (второй виток) и т.д. Итак, $A_{-n}(t - 2\pi n)$ совпадает с точкой $A(x, y)$.

Таким образом, любым точкам оси t $A_k(t + 2\pi k)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, соответствует только

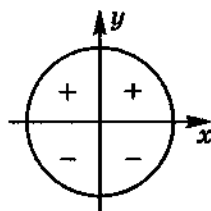
При этом определении легко показать, что значения тригонометрических функций числового аргумента t равны значениям тригонометрических функций для угла в t радиан. Значит, тригонометрическая функция числового аргумента t это однозначная тригонометрическая функция угла в t радиан.

Используя эти идеи, дадим более четкие определения. Поместим единичную окружность в систему координат так, чтобы центр окружности и начало координат совместились.

I. Определение. Синусом угла α называется ордината точки M_α единичной окружности, где $(\cdot) M_\alpha$ получается поворотом $(\cdot) M_0$ на угол α в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\alpha > 0$ и в отрицательном (по часовой стрелке), если $\alpha < 0$.



Из определения следует, что раз ордината верхней полуплоскости положительна, то синус угла I и II четверти больше нуля, а так как ордината нижней полуплоскости отрицательна, то

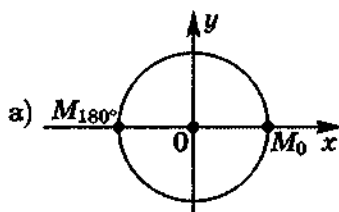


синус угла III и IV четверти меньше нуля. Очевидно, что $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, так как ордината точек единичной окружности меняется только в этих пределах.

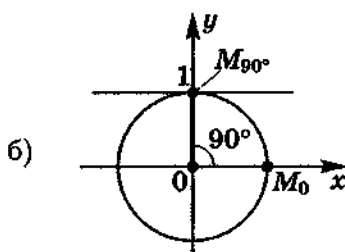
1. Таким образом, $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, так как ордината будет той же. Из определения синуса также следует, что

$$\sin 0 = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ = \dots = \sin 180^\circ k, \text{ или}$$

$$\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = \dots = \sin \pi k.$$

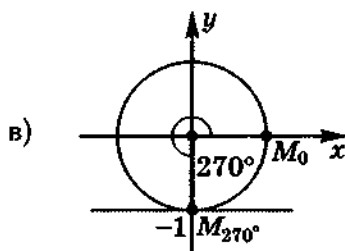


Таким образом, если $\sin \alpha = 0$, то $\alpha = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$, так как проекция $(\cdot) M_0$ или $(\cdot) M_\pi$ на ось ординат равна нулю.



$$\sin 90^\circ = \sin(90^\circ + 360^\circ k) = \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1,$$

т. е. если $\sin \alpha = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



$$\begin{aligned} \sin 270^\circ &= \sin(270^\circ + 360^\circ k) = \sin(-90^\circ) = \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right) = \\ &= \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = -1, \end{aligned}$$

т. е. если $\sin \alpha = -1$, то $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

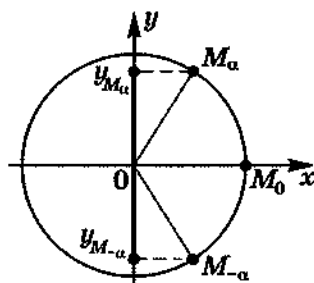
2. Из определения имеем следующие свойства:

а) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$;

$$y_{M_\alpha} = -y_{M_{-\alpha}};$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Это свойство означает, что $y(x) = \sin x$ — нечетная функция, а значит ее график центрально-симметричен относительно начала координат.

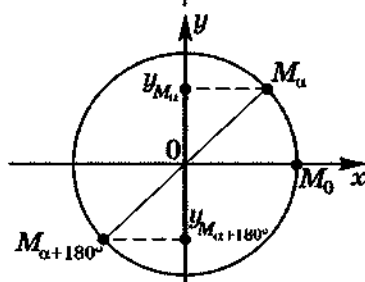


б) $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$;

$$y_{M_\alpha} = -y_{M_{\alpha+180^\circ}};$$

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha + 180^\circ);$$

$$\text{например, } \sin 225^\circ = \sin(45^\circ + 180^\circ) = -\sin 45^\circ.$$



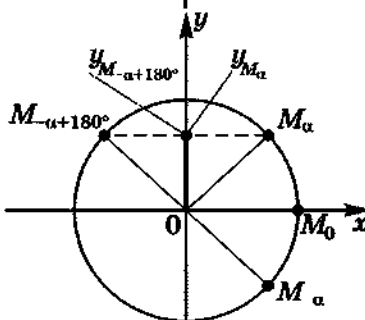
в) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

$$y_{M_\alpha} = y_{M_{180^\circ - \alpha}};$$

$$\sin \alpha = \sin(-\alpha + 180^\circ);$$

$$\text{например, } \sin 120^\circ = \sin(-60^\circ + 180^\circ) = \sin 60^\circ;$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6}.$$



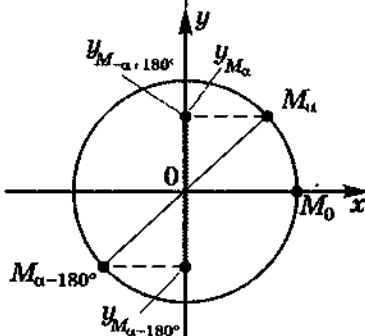
г) $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha$;

$$y_{M_\alpha} = -y_{M_{\alpha-180^\circ}};$$

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ);$$

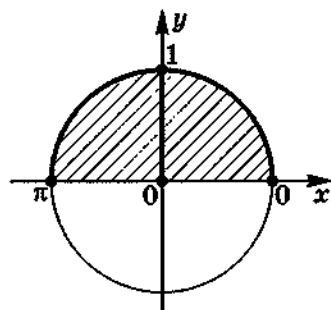
$$\text{например, } \sin(-165^\circ) = \sin(15^\circ - 180^\circ) = -\sin 15^\circ;$$

$$\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) = -\sin \frac{\pi}{3}.$$



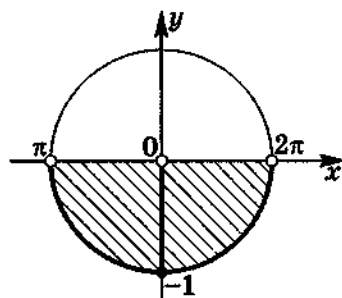
3. а) $\sin \alpha \geq 0$, неравенство выполняется при $\pi \geq \alpha \geq 0$.

Если обобщить для любого угла с точностью до полного числа оборотов, то
 $\pi + 2\pi k \geq \alpha \geq 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

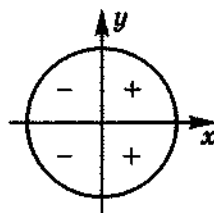
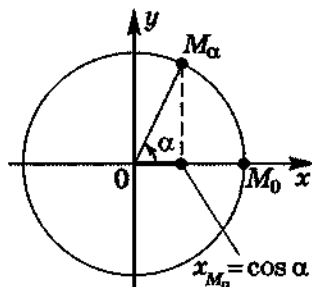


б) $\sin \alpha < 0$, неравенство выполняется при $2\pi > \alpha > \pi$.

Учитывая полное число оборотов, получим
 $2\pi + 2\pi k > \alpha > \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



II. Определение. Косинусом угла α называется абсцисса точки M_α единичной окружности, где $(\cdot) M_\alpha$ получается поворотом $(\cdot) M_0$ на угол α в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\alpha > 0$ и в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $\alpha < 0$.

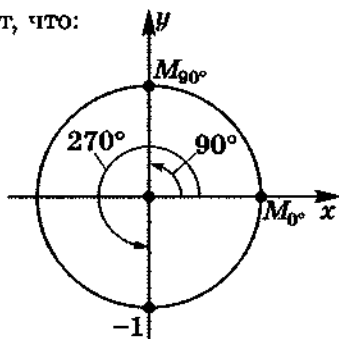


Из определения следует, что раз абсцисса правой полуплоскости положительна, то косинус угла I и IV четверти больше нуля, а так как абсцисса левой полуплоскости отрицательна, то косинус угла II и III четверти меньше нуля.

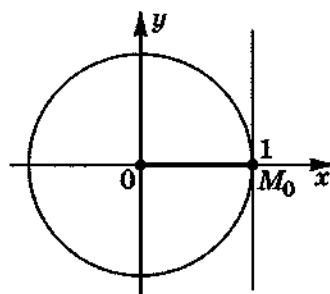
Очевидно, что $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, так как абсцисса точек единичной окружности меняется только в этих пределах. Так же, как и в случае с синусом, значение косинуса угла α совпадает со значением косинуса угла, повернутого на полный оборот в том или ином направлении k раз ($k \in \mathbb{Z}$), т.е. $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, так как абсцисса будет той же.

1. Из определения косинуса следует, что:

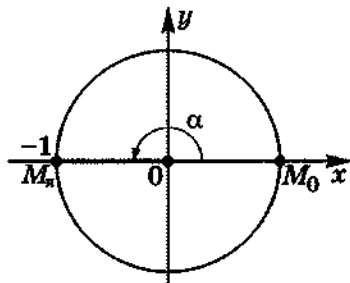
$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 90^\circ &= \cos 270^\circ = \dots = \\ &= \cos(90^\circ + 180^\circ k) = \cos \frac{\pi}{2} = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) = \dots = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) = 0, \\ \text{т.е. если } \cos \alpha &= 0, \\ \text{то } \alpha &= \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 0 &= \cos 2\pi = \dots = \\ &= \cos 2\pi k = 1, \\ \text{т.е. если } \cos \alpha &= 1, \\ \text{то } \alpha &= 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{в) } \cos \pi &= \cos(\pi + 2\pi) = \dots = \\ &= \cos(\pi + 2\pi k) = -1, \\ \text{т.е. если } \cos \alpha &= -1, \\ \text{то } \alpha &= \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



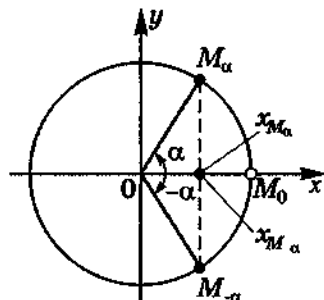
2. Из определения имеем следующие свойства:

а) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$;

$$x_{M_\alpha} = x_{M_{-\alpha}};$$

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha).$$

Это свойство означает, что $y(x) = \cos x$ есть четная функция, а значит график ее симметричен относительно оси ординат.



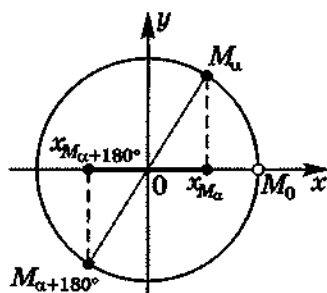
б) $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$;

$$x_{M_{\alpha+180^\circ}} = -x_{M_\alpha};$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\text{например, } \cos 240^\circ = \cos(60^\circ + 180^\circ) = -\cos 60^\circ;$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{3}.$$



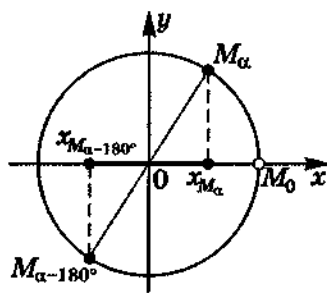
в) $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$;

$$x_{M_{\alpha-180^\circ}} = -x_{M_\alpha};$$

$$\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\text{например, } \cos(-150^\circ) = \cos(30^\circ - 180^\circ) = -\cos 30^\circ;$$

$$\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{3}.$$



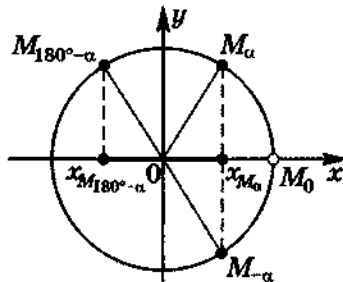
г) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$;

$$x_{M_{180^\circ-\alpha}} = -x_{M_\alpha};$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{например, } \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ;$$

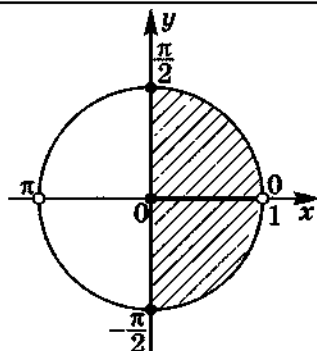
$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4}.$$



3. а) $\cos \alpha \geq 0$, неравенство выполняется при $\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq -\frac{\pi}{2}$.

Учитывая полное число оборотов, получим

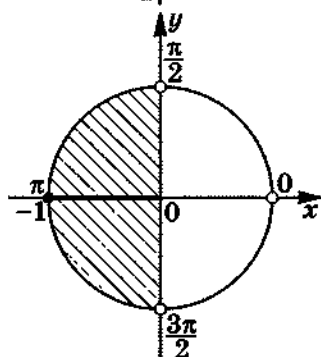
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geq \alpha \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$



- б) $\cos \alpha < 0$, неравенство выполняется при $\frac{3}{2}\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$.

Обобщая, имеем

$$\frac{3}{2}\pi + 2\pi k > \alpha > \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$



Для лучшего понимания и определения тангенса угла α рассмотрим единичную окружность ($R = 1$).

$$\triangle OM_\alpha x_{M_\alpha} \sim \triangle OM_0 M'_\alpha$$

($M_\alpha \in I$ четверти), тогда

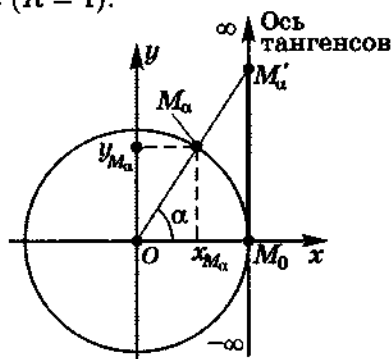
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_\alpha x_{M_\alpha}}{Ox_{M_\alpha}} = \frac{M'_\alpha M_0}{OM_0}.$$

Так как $R = 1$, то $OM_0 = 1$, значит $\operatorname{tg} \alpha = M'_\alpha M_0$.

Вертикальная прямая, параллельная оси Oy , проходящая через $(\cdot) M_0$, по сути является линией значений тангенса, т.е. числовой осью.

Аналогично можно доказать, что утверждение верно и для II, III и IV четверти.

Примечание. Имеется в виду ордината точки пересечения прямой OM_α с прямой $M_0 M'_\alpha$, т.е. с осью тангенсов.



III. Определение. Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки M_α , единичной окружности к ее абсциссе, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{M_\alpha}}{x_{M_\alpha}}$, причем точка M_α не принадлежит оси ординат.

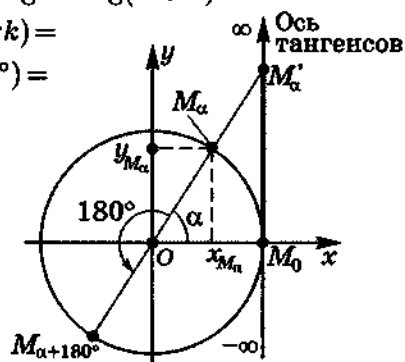
Примечание. Можно дать и иное определение:

тангенсом угла α называется проекция точки M_α единичной окружности на ось тангенсов, где точка M_α получается из точки M_0 поворотом на угол α в положительном направлении.

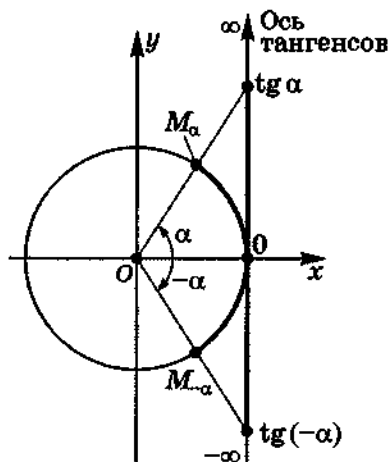
1. а) Из чертежа следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) =$
 $= \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \dots = \operatorname{tg}(\alpha + \pi k) =$
 $= \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) =$
 $= \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ k) \mid k \in \mathbb{Z},$

так как для углов $\alpha + \pi k$ проекция на линию тангенсов одна и та же.

Из чертежа также следует распределение знаков по четвертям.



- б) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$;
 это свойство означает, что $y(x) = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция ($D(y)$ — симметричное множество), а значит график ее центрально-симметричен относительно начала координат.



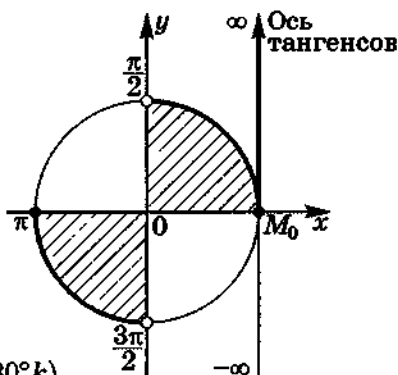
2. а) $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$, неравенство выполняется при

$$\frac{\pi}{2} > \alpha \geq 0 \quad (90^\circ > \alpha \geq 0^\circ).$$

Учтя, что все значения повторяются через каждые пол-оборота, получим обобщение

$$\frac{\pi}{2} + \pi k > \alpha \geq \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{или } 90^\circ + 180^\circ k > \alpha \geq 180^\circ k).$$



- б) $\operatorname{tg} \alpha < 0$, неравенство выполняется при

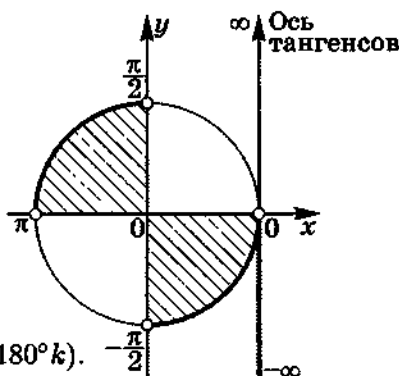
$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$$

$$(-90^\circ < \alpha < 0^\circ).$$

Обобщая, имеем

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < \alpha < \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{или } -90^\circ + 180^\circ k < \alpha < 180^\circ k).$$

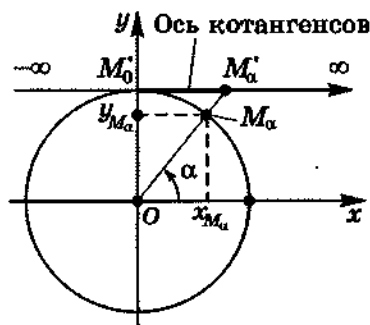


Аналогично можно ввести в оборот линию котангенсов со всеми свойствами, следующими из чертежа. Рассмотрим единичную окружность ($R = 1$). $\triangle OM_\alpha y_{M_\alpha} \sim \triangle OM'_\alpha M'_0$, тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{y_{M_\alpha}}{OM_\alpha} = \frac{M'_\alpha M'_0}{OM'_0}.$$

Так как $R = 1$, то $OM'_0 = 1$, значит $\operatorname{ctg} \alpha = M'_\alpha M'_0$.

Горизонтальная прямая, параллельная оси Ox , проходящая через $(\cdot) M'_0$, (т.е. $(0; 1)$), по сути является линией значений котангенса, т.е. числовой осью.

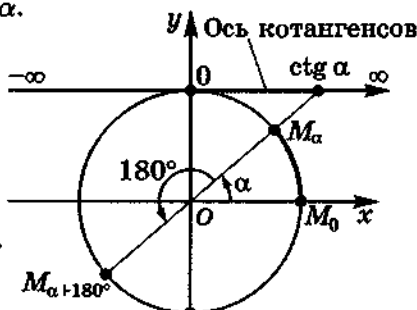


IV. Определение. Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки M_α единичной окружности к ее ординате, т. е. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_{M_\alpha}}{y_{M_\alpha}}$, причем точка M_α не принадлежит оси абсцисс.

Примечание. Можно дать и иное определение:

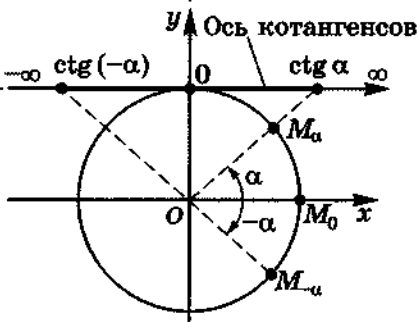
котангенсом угла α называется проекция точки M_α единичной окружности на ось котангенсов, где точка M_α получается поворотом точки M_0 на угол α .

$$\begin{aligned} 1. \text{ а) } \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \dots = \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ) = \\ &= \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ k) \mid k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



$$\text{б) } \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

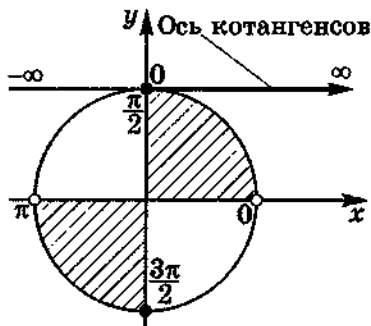
Это свойство означает, что $y(x) = \operatorname{ctg} x$ — нечетная функция ($D(y)$ — симметричное множество), а значит ее график центрально-симметричен относительно начала координат.



$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \operatorname{ctg} \alpha \geq 0, \text{ неравенство выполняется при } \frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0 \\ (90^\circ \geq \alpha > 0^\circ). \end{aligned}$$

Обобщая, получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \pi k \geq \alpha > \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ (\text{или } 90^\circ + 180^\circ k \geq \alpha > 180^\circ k). \end{aligned}$$



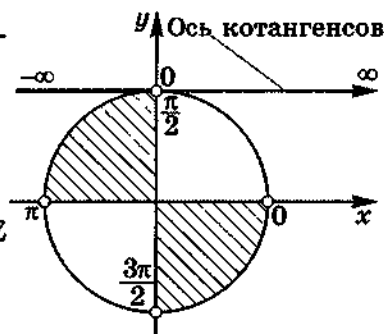
б) $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, неравенство выполняется при $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$

($180^\circ > \alpha > 90^\circ$).

Обобщая, имеем

$$\pi + \pi k > \alpha > \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

(или $180^\circ + 180^\circ k > \alpha > 90^\circ + 180^\circ k$).

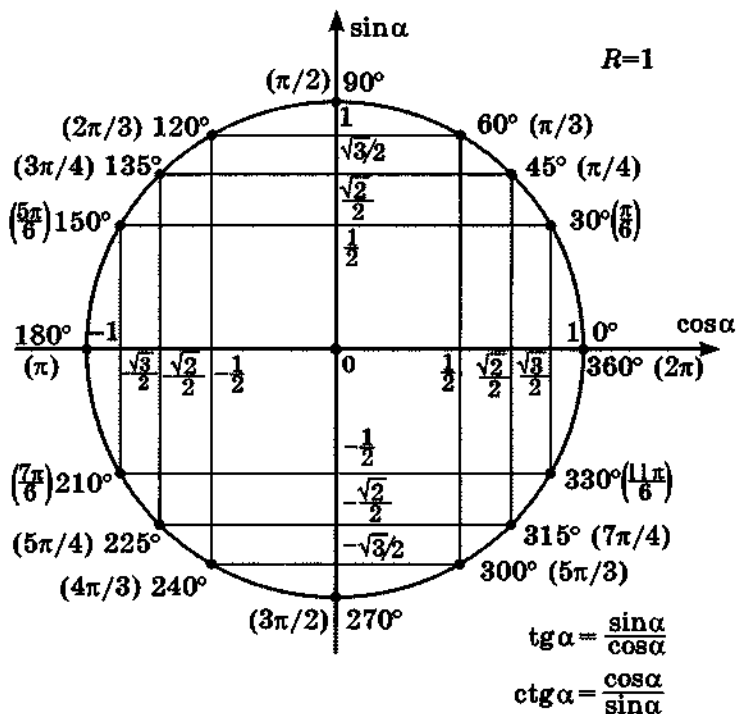


Примечание. В радианной или градусной мере измеряется α , специально оговаривать в дальнейшем мы не будем, если по смыслу ясно, о чем идет речь.

2

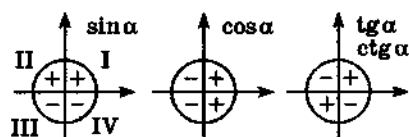
Вычисление значений тригонометрических функций любого угла

Таблица некоторых значений
тригонометрических функций



α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
$\alpha_{\text{рад}}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

α°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
$\alpha_{\text{рад}}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Практикум 1**1. Постройте углы:**

- 1) косинус которых равен $-0,24$;
- 2) синус которых равен $-0,25$.

2. Постройте углы и вычислите значения тригонометрических отношений этих углов, используя таблицу и некоторые свойства тригонометрических отношений, вытекающие из их определения:

- 1) $\alpha = \frac{11\pi}{4}$;
- 2) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

3. Что больше:

- 1) $\sin 1,8$ или $\sin 2,8$;
- 2) $\sin 20^\circ$ или $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ$?

Постройте эти углы.

4. Определите знак частного $-\frac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ}$.**5. 1) Существует ли $\sin x = \frac{m}{m-1}$ и если да, то при каких значениях m ?**

2) $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,75}$. Найдется ли такое α ?

3) $y = 3 \sin x + 5$. $E(y) = ?$

6. Вычислите:

- 1) $a^2 \sin 2\pi + b^2 \operatorname{tg} 0 - 2ab \cos \pi + b^2 \cos(-\pi)$;
- 2) $\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3 \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha) - \operatorname{tg}(15^\circ - 4\alpha) + 2 \cos(-2\alpha)$,
если $\alpha = 15^\circ$;

$$3) \frac{4 \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4 \sin^2 \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} - 1};$$

$$4) \frac{\cos^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2 \left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6}.$$

7. Решите тригонометрические неравенства, используя тригонометрический круг:

$$1) \sin 2x \geq 0;$$

$$2) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0;$$

$$3) \cos 3x \geq 0;$$

$$4) \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0;$$

$$5) \operatorname{tg} \left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0;$$

$$6) \operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0;$$

$$7) \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0;$$

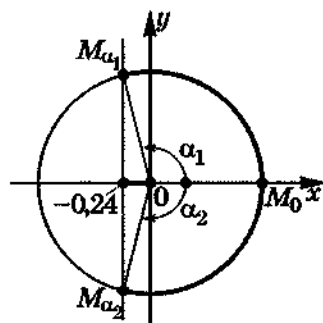
$$8) \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0.$$

Решение практикума 1

1. Постройте углы:

- 1) косинус которых равен $-0,24$;
- 2) синус которых равен $-0,25$.

- 1) Отметим на оси Ox число $-0,24$ и проведем через эту точку хорду, перпендикулярную Ox (по определению $\cos \alpha$ — проекция на ось абсцисс). Получим на единичной окружности точки M_{α_1} и M_{α_2} . Тогда угол α есть объединение двух серий углов α_1 и α_2 с точностью до полного числа оборотов.



$$\cos \alpha_1 = -0,24; \quad \alpha = \alpha_1 + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z};$$

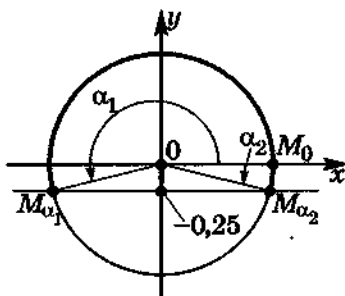
$$\cos \alpha_2 = -0,24; \quad \alpha = \alpha_2 + 360^\circ k;$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2.$$

Итак, $\alpha = \pm \alpha_1 + 360^\circ k$, где $k \in \mathbb{Z}$,

или $\alpha = \pm \alpha_1 + 2\pi k$ (в радианном исчислении углов).

- 2) Отметим на оси Oy число $-0,25$ и проведем через эту точку хорду, перпендикулярную Oy (по определению $\sin \alpha$ — проекция на ось ординат). Получим на единичной окружности точки M_{α_1} и M_{α_2} . Тогда угол α есть объединение двух серий углов, связанных с α_1 и α_2 с точностью до полного числа оборотов.



$$\sin \alpha = -0,25;$$

$$\sin \alpha_1 = -0,25; \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + 360^\circ k \\ \alpha = \alpha_2 + 360^\circ k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Но } \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ;$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + 360^\circ k \\ \alpha = -\alpha_1 + 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + 2\pi k \\ \alpha = -\alpha_1 + \pi + 2\pi k \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}$$

(в радианном исчислении углов).

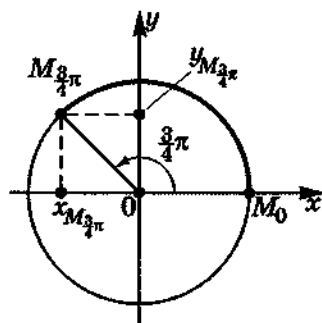
2. Постройте углы и вычислите значения тригонометрических функций этих углов, используя таблицу и некоторые свойства тригонометрических функций, вытекающие из их определения:

$$1) \alpha = \frac{11\pi}{4};$$

$$2) \alpha = \frac{7\pi}{6}.$$

$$1) \frac{11\pi}{4} = 2\frac{3}{4}\pi;$$

Выделим из числа $\frac{11\pi}{4}$ целую часть — полное число оборотов: $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. На единичной окружности отметим угол $\frac{3\pi}{4}$ (II четверть).



$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \left(2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(2\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4}} = -1.$$

2) По определению очевидно, что:

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha;$$

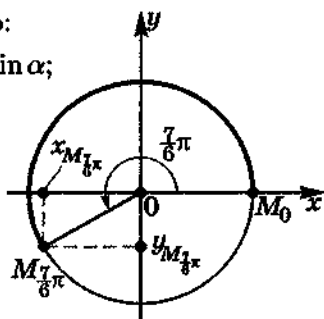
$$\cos(\alpha + 180^\circ) = \cos(\alpha + \pi) =$$

$$= -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha.$$



Поэтому

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

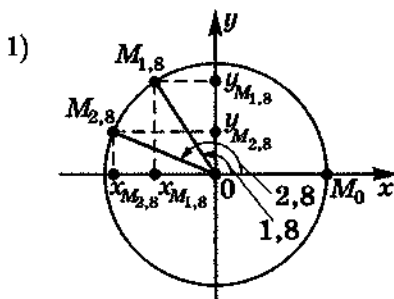
$$\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}} = \sqrt{3}.$$

3. Что больше:

1) $\sin 1,8$ или $\sin 2,8$ (используйте построение углов);

2) $\sin 20^\circ$ или $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ$?

Построим эти углы.



$1,8 \approx 1,8 \cdot 57^\circ \approx 103^\circ \in \text{II четверти};$

$2,8 \approx 2,8 \cdot 57^\circ \approx 160^\circ \in \text{II четверти}.$

Так как $y_{M_{1,8}} > y_{M_{2,8}}$, то $\sin 1,8 > \sin 2,8$.

- 2) Так как $35^\circ \in \text{I четверти}$, то $0 < \sin 35^\circ < 1$;
 $20^\circ \in \text{I четверти}$, то $0 < \sin 20^\circ < 1$.

Тогда $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ} = \sin 20^\circ$
 $\sin 35^\circ < 1$

Перемножим почленно, тогда $\sin 20^\circ \cdot \sin 35^\circ < \sin 20^\circ$.

4. Определите знак частного $-\frac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ}$.

Так как $318^\circ \in \text{IV четверти}$, то $\cos 318^\circ > 0$;

так как $394^\circ = 360^\circ + 34^\circ \in \text{I четверти}$, то $\operatorname{tg} 394^\circ > 0$, тогда
 $-\frac{\cos 318^\circ}{\operatorname{tg} 394^\circ} < 0$.

5. 1) Существует ли $\sin x = \frac{m}{m-1}$ и если да, то при каких значениях m ?

2) $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,75}$. Найдется ли такое α ?

3) $y = 3 \sin x + 5$. $E(y) = ?$

- 1) Так как $\begin{cases} \sin x \leq 1 \\ \sin x \geq -1 \end{cases}$, то

$$\begin{cases} \frac{m}{m-1} \leq 1 \\ \frac{m}{m-1} \geq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{m-m+1}{m-1} \leq 0 \\ \frac{m+m-1}{m-1} \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{m-1} \leq 0 \\ \frac{2m-1}{m-1} \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \text{диаграмма на числовой прямой } m \end{cases}$$

Ответ: при $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ существует $\sin x = \frac{m}{m-1}$.

- 2) Так как $\sqrt[3]{1,75} > 1$, то $-\sqrt[3]{1,75} < -1$,

т.е. $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,75} < -1$. Но $\sin \alpha \geq -1$, т.е. не существует такого α , чтобы $\sin \alpha = -\sqrt[3]{1,75}$.

- 3) Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$, тогда $2 \leq 3 \sin x + 5 \leq 8$.

Ответ: $E(y) = [2; 8]$ для $y = 3 \sin x + 5$.

6. Вычислите:

- 1) $a^2 \sin 2\pi + b^2 \operatorname{tg} 0 - 2ab \cos \pi + b^2 \cos(-\pi) =$
 $= a^2 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 - 2ab \cdot (-1) + b^2 \cdot (-1) = \boxed{b(2a - b)}$;
- 2) $\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3 \operatorname{ctg}(90^\circ - 2\alpha) - \operatorname{tg}(15^\circ - 4\alpha) + 2 \cos(-2\alpha)$,
 если $\alpha = 15^\circ$.

Подставим в выражение вместо α его значение (15°), получим:

$$\begin{aligned} & \sin 60^\circ + 3 \operatorname{ctg} 60^\circ - \operatorname{tg}(-45^\circ) + 2 \cos(-30^\circ) = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{2,5\sqrt{3} + 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{4 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4 \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} - 1} = \\ = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \\ = \frac{(2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \boxed{3 + 2\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

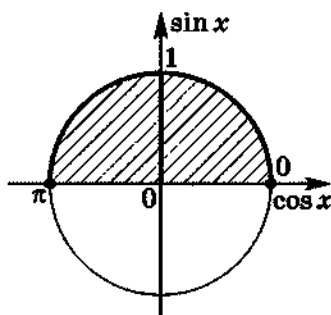
$$\begin{aligned} 4) \frac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = \\ = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-1 - \frac{1}{2}} + (\sqrt{3})^2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}} + 3 = \\ = -\frac{3}{4} : \frac{3}{2} + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \boxed{2,5}. \end{aligned}$$

7. Решите тригонометрические неравенства, используя тригонометрический круг:

1) $\sin 2x \geq 0$.

$$\pi + 2\pi k \geq 2x \geq 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k \geq x \geq \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$



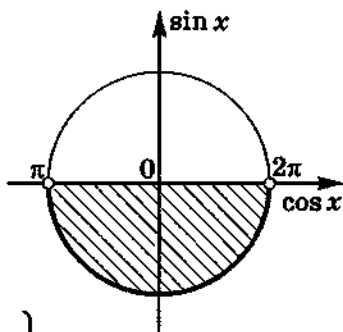
Иногда записывают $\left\{ \left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) < 0$.

$$2\pi + 2\pi k > 3x - \frac{\pi}{4} > \pi + 2\pi k;$$

$$2\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k > 3x > \frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k;$$

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k > x > \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi k;$$

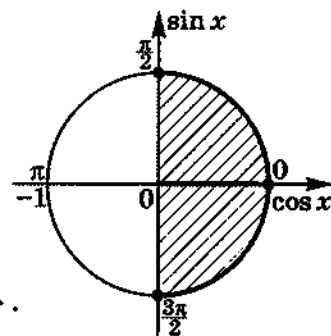


$\left\{ \left(\frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi k; \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3) $\cos 3x \geq 0$.

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geq 3x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \geq x \geq -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k;$$



$\left\{ \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k; \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

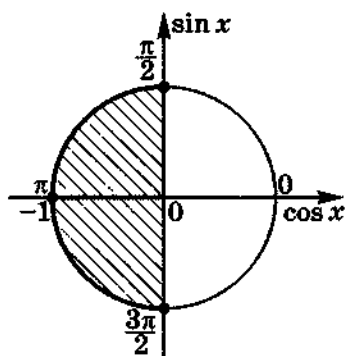
$$4) \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0.$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2\pi k \geq 2x + \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{4}{3}\pi + 2\pi k \geq 2x \geq \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{2}{3}\pi + \pi k \geq x \geq \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$\left\{ \left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2}{3}\pi + \pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



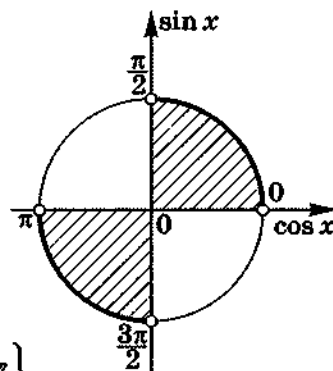
$$5) \operatorname{tg}\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right) > 0.$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k > 2x - \frac{5}{6}\pi > \pi k;$$

$$\frac{4}{3}\pi + \pi k > 2x > \frac{5}{6}\pi + \pi k;$$

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}k > x > \frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{2}k;$$

$$\left\{ \left(\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{2}k; \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



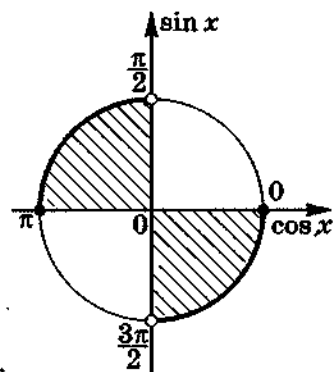
$$6) \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0.$$

$$\pi + \pi k \geq 3x + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\frac{3\pi}{4} + \pi k \geq 3x > \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k \geq x > \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k;$$

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



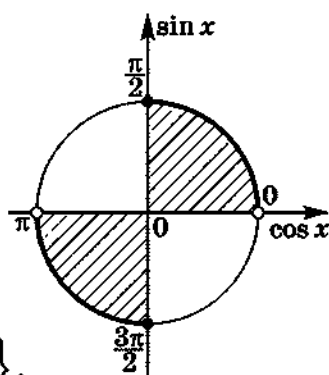
$$7) \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \geq 0.$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k \geq 2x + \frac{\pi}{3} > \pi k;$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi k \geq 2x > -\frac{\pi}{3} + \pi k;$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \geq x > -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k;$$

$$\left\{ \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



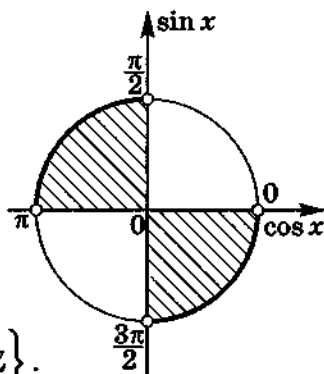
$$8) \operatorname{ctg} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) < 0.$$

$$\pi + \pi k > 3x - \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\frac{4}{3}\pi + \pi k > 3x > \frac{5}{6}\pi + \pi k;$$

$$\frac{4}{9}\pi + \frac{\pi}{3}k > x > \frac{5}{18}\pi + \frac{\pi}{3}k;$$

$$\left\{ \left(\frac{5}{18}\pi + \frac{\pi}{3}k; \frac{4}{9}\pi + \frac{\pi}{3}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Примечание. Обратите вниманис на то, что в данной задаче не совсем привычные оси координат. Так как аргументами (углами) здесь являются выражения, зависящие от x (а эти выражения — длины дуги или величины углов), то осями (проекциями) являются $\cos x$ и $\sin x$.

Практикум 2

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для указанных углов.

1.

α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-630°	-210°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

2.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

3.

α	1080°	405°	330°	-225°	-300°	-1020°	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{3}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

4.

α	870°	-630°	-810°	210°	315°	-240°	$-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{32\pi}{3}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

5.

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

6.

α	930°	-690°	750°	675°	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{6}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

Решение практикума 2

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для указанных углов.

1.

α	720°	225°	300°	870°	900°	-330°	-630°	-210°
$\sin \alpha$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	нет	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	нет	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$

2.

α	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{4}$	$3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{55\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	нет	-1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	0	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.

α	1080°	405°	330°	-225°	-300°	-1020°	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{3}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	нет	1	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4.

α	870°	-630°	-810°	210°	315°	-240°	$-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{32\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	1	$-\sqrt{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

6.

α	930°	-690°	750°	675°	$-\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-1	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Тренировочная работа 1

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для указанных углов.

1.

α	330°	630°	210°	420°	810°	-570°	-720°	-225°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

2.

α	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{20\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{23\pi}{6}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

3.

α	1050°	300°	225°	-1080°	-405°	-390°	$7\frac{5}{6}\pi$	$11\frac{1}{3}\pi$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

4.

α	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{32\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	240°	-315°	-210°	810°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

5.

α	630°	-870°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{4}$	-30°	-90°	$-\frac{29\pi}{3}$	$-\frac{21\pi}{4}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

6.

α	660°	840°	-270°	-780°	-600°	$\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

Решение тренировочной работы 1

Заполните таблицу, вычислив значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для указанных углов.

1.

α	330°	630°	210°	420°	810°	-570°	-720°	-225°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	нет	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\sqrt{3}$	нет	-1

2.

α	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$-3\frac{1}{6}\pi$	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{20\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{2}$	$-\frac{23\pi}{6}$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0	$\sqrt{3}$

3.

α	1050°	300°	225°	-1080°	-405°	-390°	$7\frac{5}{6}\pi$	$11\frac{1}{3}\pi$
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	нет	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

4.

α	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{32\pi}{3}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	240°	-315°	-210°	810°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	0

5.

α	630°	-870°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{4}$	-30°	-90°	$-\frac{29\pi}{3}$	$-\frac{21\pi}{4}$
$\sin \alpha$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \alpha$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	нет	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	нет	$\sqrt{3}$	-1
$\operatorname{ctg} \alpha$	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1

6.

α	660°	840°	-270°	-780°	-600°	$\frac{15\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	нет	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Можно доказать следующие взаимоотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла, отраженные в таблице.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$		$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	

Здесь знаки определяются знаком тригонометрической функции, стоящей слева, в зависимости от того, какой четверти принадлежит α .

Например, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Тогда $\cos \alpha < 0$, а $\sin \alpha > 0$, значит

в формуле $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ необходимо поставить такой

знак, чтобы косинус принимал отрицательные значения:

$$\cos \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = -\frac{3}{5},$$

а в формуле $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, чтобы синус был положи-

$$\sin \alpha = \frac{-\frac{4}{3}}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Практикум 3

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -0,6$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

2) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

3) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Докажите тождества:

1) $\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$;

2) $(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

3. Упростите:

1) $\frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha}$;

2) $(a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2 + (a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin^2 x - \cos^2 x + 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$;

3) $\sin x - \sin^2 x + \operatorname{tg} 45^\circ = \cos^2 x + \cos 45^\circ$;

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin x}$;

5) $\frac{\cos x}{\sin x + 1} = 0$.

Решение практикума 3

1. Вычислите:

- 1)
- $\operatorname{tg} \alpha$
- , если
- $\cos \alpha = -0,6$
- при
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- .

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (1.1)$$

$\sin \alpha > 0$, так как $\alpha \in \text{II}$ четверти;

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{-0,6} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

- 2)
- $\sin \alpha$
- ,
- $\cos \alpha$
- , если
- $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$
- при
- $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
- .

$\alpha \in \text{IV}$ четверти, значит $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (1.5) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

Можно проще: так как $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{то } \sin \alpha = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{5}.$$

- 3)
- $\cos \alpha$
- ,
- $\operatorname{tg} \alpha$
- ,
- $\operatorname{ctg} \alpha$
- , если
- $\sin \alpha = \frac{12}{13}$
- при
- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- .

$\alpha \in \text{II}$ четверти, тогда $\cos \alpha < 0$;

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (1.4)$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2}; \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \boxed{-\frac{5}{13}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = \boxed{-2,4}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \boxed{-\frac{5}{12}}.$$

2. Докажите тождества:

$$1) \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Пусть L — левая часть и Π — правая часть.

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 - \sin^2 \alpha = \\ &= \left(\frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \right)^2 - \sin^2 \alpha = \\ &= (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \cos^2 \alpha \\ \Pi &= \cos^2 \alpha \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi, \quad \left(\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} \right).$$

Вывод. $\left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ есть тождество, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$.

$$2) (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \sin \alpha \neq 0, \alpha \neq \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \Pi &= \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

3. Упростите:

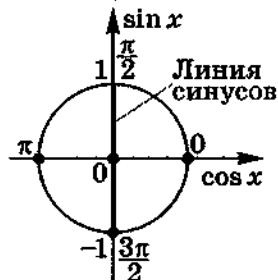
$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \\
 &= \sin \alpha + \cos \alpha \text{ при } \sin \alpha \neq \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2 + (a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2 &= \\
 &= a^2 \sin^2 \alpha + 2ab \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha + \\
 &+ a^2 \cos^2 \alpha - 2ab \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = \\
 &= a^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

4. Решите уравнения:

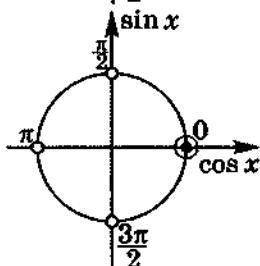
$$1) \sin^2 x - \cos^2 x + 1 = 0.$$

Так как $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$,
то $\sin^2 x + \sin^2 x = 0$;
 $2 \sin^2 x = 0$;
 $\sin x = 0$; $x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.



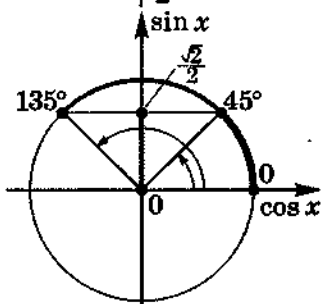
$$2) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x.$$

$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x$;
 $\begin{cases} \cos x \neq 0; \\ \sin x \neq 0; \end{cases}$
 $\cos x = 1$; $x = 2\pi k$,
 но $x \neq \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z}$,
 значит решения нет.



$$3) \sin x - \sin^2 x + \operatorname{tg} 45^\circ = \cos^2 x + \cos 45^\circ.$$

$\sin x = \sin^2 x + \cos^2 x - \operatorname{tg} 45^\circ + \cos 45^\circ$;
 $\sin x = 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$;



$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 135^\circ + 360^\circ n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$

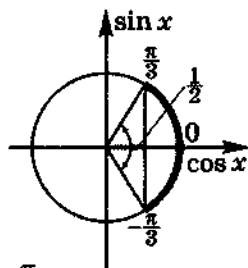
Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin x};$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x};$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin x};$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}; \quad \cos x = \frac{1}{2}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

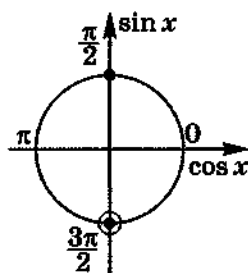
5) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0;$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$



Тренировочная работа 2

1. Вычислите:

1) $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$ при $450^\circ < \alpha < 540^\circ$;

2) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$ при $\cos \alpha > 0$;

3) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}$ при $630^\circ < \alpha < 720^\circ$.

2. Докажите тождества:

1) $(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha$;

2) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$;

3) $\frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

3. Упростите:

1) $A(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

2) $A(\alpha) = \frac{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg} x + 1 = \sin^2 x + \cos^2 x$;

2) $2 \sin x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$;

3) $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

Решение тренировочной работы 2

1. Вычислите:

- 1)
- $\cos \alpha$
- , если
- $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$
- при
- $450^\circ < \alpha < 540^\circ$
- .

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad 1.5$$

 $\alpha \in \text{II}$ четверти, тогда $\cos \alpha < 0$.

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{15}{8}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64+225}{64}}} = \boxed{-\frac{8}{17}}.$$

- 2)
- $\cos \alpha$
- ,
- $\operatorname{tg} \alpha$
- ,
- $\operatorname{ctg} \alpha$
- , если
- $\sin \alpha = -0,6$
- при
- $\cos \alpha > 0$
- .

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad 1.4$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \boxed{0,8}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,6}{0,8} = \boxed{-\frac{3}{4}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

- 3)
- $\sin \alpha$
- ,
- $\cos \alpha$
- ,
- $\operatorname{tg} \alpha$
- , если
- $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}$
- при
- $630^\circ < \alpha < 720^\circ$
- .

 $\alpha \in \text{IV}$ четверти, значит $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \quad 1.3$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = \boxed{-\frac{7}{25}};$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha; \quad \cos \alpha = -\frac{24}{7} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = \boxed{\frac{24}{25}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \boxed{-\frac{7}{24}}.$$

2. Докажите тождества:

$$1) (\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= (\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \right) \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \sin^2 \alpha \\ \Pi = \sin^2 \alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}, \text{ т. е. } \alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$$

$$L = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$3) \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$L = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{т. е. } \alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

3. Упростите:

$$1) A(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } A(\alpha) = \frac{2}{\sin \alpha}, \text{ если } \sin \alpha \neq 0.$$

$$2) A(\alpha) = \frac{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1 - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$A(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (\sin \alpha \neq 0).$$

4. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg} x + 1 = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$$\operatorname{tg} x + 1 = 1; \quad \operatorname{tg} x = 0; \quad x = 180^\circ k; \quad x = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ответ: } \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$2) 2 \sin x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x.$$

$$2 \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 = 0;$$

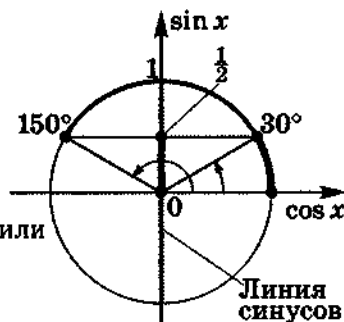
$$2 \sin x + 1 - 2 = 0;$$

$$2 \sin x - 1 = 0; \quad \sin x = \frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

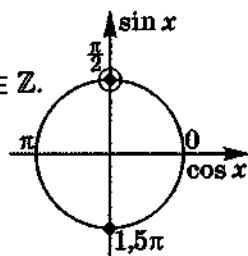


$$3) \frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Практикум 4

1. Упростите:

$$1) A(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha});$$

$$2) A(\alpha) = \cos \alpha(1 + \operatorname{tg} \alpha) - \sin \alpha(1 + \operatorname{ctg} \alpha);$$

$$3) A(\alpha) = (1 - \cos \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha)^2 - 4 \cos^2 \alpha.$$

2. Вычислите:

$$1) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12} \text{ при } 180^\circ < \alpha < 270^\circ;$$

$$2) A(\alpha) = \frac{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha} \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = -2;$$

$$3) A(\alpha) = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3 \\ \left(\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

3. Докажите тождества:

$$1) \cos \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$2) \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1;$$

$$3) \frac{81 \sin^4 \alpha - 16 \cos^4 \alpha}{(3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)} = 5 \sin^2 \alpha + 4.$$

Решение практикума 4

1. Упростите:

$$1) A(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \text{ Так как } \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } A(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$2) A(\alpha) = \cos \alpha(1 + \operatorname{tg} \alpha) - \sin \alpha(1 + \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \cos \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) - \sin \alpha \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \cos \alpha + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } A(\alpha) = 0, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$3) A(\alpha) = (1 - \cos \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha)^2 - 4 \cos^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha = \\ &= 2 - 2 \cos^2 \alpha = 2(1 - \cos^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } A(\alpha) = 2 \sin^2 \alpha.$$

2. Вычислите:

$$1) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12} \text{ при } 180^\circ < \alpha < 270^\circ.$$

$$\alpha \in \text{III четверти, тогда } \sin \alpha < 0. \quad \boxed{\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (1.2)$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{5}{12}}{-\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}} = -\frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} = \boxed{-\frac{5}{13}}.$$

$$2) A(\alpha) = \frac{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha} \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

$$A(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha \cdot 3 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha (2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha}{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$A(\alpha) = \frac{3 \cdot (-2)}{2 - 3 \cdot (-2)^2} = \frac{-6}{2 - 12} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Итак, } A(\alpha) = \boxed{\frac{3}{5}}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

$$3) A(\alpha) = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3.$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}.$$

С другой стороны,

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 9; \quad \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 9;$$

$$\left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \right)^2 = 9; \quad \left(\frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \right)^2 = 9.$$

$$\text{Таким образом, } A(\alpha) = \boxed{9}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3.$$

3. Докажите тождества:

$$1) \cos \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\begin{aligned} L &= \cos \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \\ &= \cos \alpha \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \Pi &= \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$2) \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \\ &= 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = 1 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$3) \frac{81 \sin^4 \alpha - 16 \cos^4 \alpha}{(3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)} = 5 \sin^2 \alpha + 4.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{81 \sin^4 \alpha - 16 \cos^4 \alpha}{(3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha)(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)} = \\ &= \frac{(9 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha)(9 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha)}{9 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha} = \\ &= 9 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha = \\ &= 5 \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 5 \sin^2 \alpha + 4. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 5 \sin^2 \alpha + 4 \\ \Pi = 5 \sin^2 \alpha + 4 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha \neq \pm \frac{2}{3}.$$

Тренировочная работа 3

1. Упростите:

$$1) A(\alpha) = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha};$$

$$2) A(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$3) A(\alpha) = (\operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right).$$

2. Вычислите:

$$1) \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \text{ если } \sec \alpha = -\frac{5}{4} \text{ при } 180^\circ < \alpha < 270^\circ;$$

$$2) A(\alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ если } \cos \alpha = 0,5 \text{ при } -90^\circ < \alpha < 0;$$

$$3) A(\alpha) = \frac{2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

3. Докажите тождества:

$$1) \frac{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin \alpha;$$

$$2) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha;$$

$$3) \frac{(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha + (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = 1.$$

Решение тренировочной работы 3

1. Упростите:

$$1) A(\alpha) = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, $A(\alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha$, если $\cos \alpha \neq -\sin \alpha$.

$$2) A(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Итак, $A(\alpha) = \sin^2 \alpha$, если $\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$.

$$3) A(\alpha) = (\operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right).$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\ &= \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} = \\ &= 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$A(\alpha) = \cos^2 \alpha$, если $\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$.

2. Вычислите:

$$1) \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha, \text{ если } \sec \alpha = -\frac{5}{4} \text{ при } 180^\circ < \alpha < 270^\circ.$$

$\alpha \in \text{III}$ четверти, тогда $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{5}{4}; \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

$$2) A(\alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha}, \text{ если } \cos \alpha = 0,5 \text{ при } -90^\circ < \alpha < 0.$$

$\alpha \in \text{IV}$ четверти, тогда $\sin \alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(\alpha) = \frac{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}}{1 + \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{0,5}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Итак, } A(\alpha) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}, \text{ если } \cos \alpha = 0,5 \text{ при } -90^\circ < \alpha < 0.$$

$$3) A(\alpha) = \frac{2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}{3 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} - \frac{3 \sin^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1, \end{aligned}$$

$$\text{тогда } A(\alpha) = \frac{2}{3} \cdot (-2)^2 - 1 = \frac{8}{3} - 1 = 1\frac{2}{3};$$

$$A(\alpha) = \boxed{1\frac{2}{3}}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = -2.$$

3. Докажите тождества:

$$1) \frac{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \alpha \\ \Pi &= \sin \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$2) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \alpha - \cos \alpha \\ \Pi &= \sin \alpha - \cos \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq \pm \cos \alpha \end{cases}.$$

$$3) \frac{(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha + (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \sin^2 \alpha + (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \sin^2 \alpha + \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = 1. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ если } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq -\cos \alpha \end{cases}.$$

Тренировочная работа 4**1. Вычислите:**

1) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

2) $\sin \beta$, если $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{24}{7}$ при $630^\circ < \beta < 720^\circ$;

3) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

4) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$ при $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

5) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$ при $810^\circ < \alpha < 900^\circ$;

6) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}$ при $\sin \alpha < 0$.

2. Упростите:

1) $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$;

2) $\left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} - \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha}$;

4) $\frac{\cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha}$.

3. Докажите тождества:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = 1$;

3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$.

4. Решите уравнения:

1) $1 + \operatorname{ctg} x - \cos^2 x = \sin^2 x;$

2) $\cos x - \cos^2 x + \operatorname{ctg} 45^\circ = \sin^2 x + \sin 45^\circ;$

3) $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0;$

4) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x + 1} = 0.$

Решение тренировочной работы 4

1. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

 $\alpha \in \text{III четверти}$, тогда $\operatorname{ctg} \alpha > 0$;

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}} \quad (1.10) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\left(-\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{169 - 144}{144}} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

2) $\sin \beta$, если $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{24}{7}$ при $630^\circ < \beta < 720^\circ$;

 $\beta \in \text{IV четверти}$, значит $\sin \beta < 0$;

$$\boxed{\sin \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}}} \quad (1.3) \quad \sin \beta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}};$$

$$\sin \beta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{576 + 49}{49}}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = \boxed{-\frac{7}{25}}.$$

3) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

 $\alpha \in \text{II четверти}$, тогда $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$;

$$\boxed{\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}} \quad (1.3)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \boxed{\frac{15}{17}};$$

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad (1.4)$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{225}{289}} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = \boxed{-\frac{8}{17}}.$$

4) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$ при $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

$\alpha \in \text{III четверти}$, тогда $\operatorname{tg} \alpha > 0$;

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}} \quad (1.3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{9}{41}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1681}{81} - 1} = \sqrt{\frac{1600}{81}} = \boxed{\frac{40}{9}}.$$

5) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$ при $810^\circ < \alpha < 900^\circ$;

$\alpha \in \text{II четверти} \Rightarrow \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$;

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (1.5)$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{576}{625}} = \boxed{-\frac{24}{25}};$$

$$\boxed{\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \quad (1.1)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \boxed{\frac{7}{25}}.$$

6) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}$ при $\sin \alpha < 0$.

Так как $\begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$, то $\alpha \in \text{IV четверти}$,

тогда $\cos \alpha > 0$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}, \text{ значит } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24};$$

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (1.5)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

2. Упростите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \\
 & = (\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\
 & = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\
 & = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) \left(1 + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right) = \\
 & = \frac{(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} = \\
 & = \frac{2}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{2}{1 - \cos \alpha} = \frac{4}{(1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{4}{\sin^2 \alpha}, \text{ если} \\
 & \begin{cases} \cos \alpha \neq 1 \\ \cos \alpha \neq -1; \end{cases} \quad \alpha \neq \pi k | k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} - \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \\
 & = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos^2 \alpha) - 1} - \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \\
 & = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} - \frac{3 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \\
 & = \frac{1 + \cos^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = 1, \text{ если} \\
 & \cos^2 \alpha \neq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{\cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \\
 & = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\
 & = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ если} \\
 & \cos \alpha \neq \pm \sin \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1; \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k | k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

3. Докажите тождества:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha;$

$$\begin{aligned} L &= (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) = \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \Pi = \operatorname{tg}^2 \alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \cos \alpha \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

2) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = 1;$

$$\begin{aligned} L &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2.$

$$\begin{aligned} L &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \\ &\quad + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 2 \\ \Pi = 2 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. Решите уравнения:

1) $1 + \operatorname{ctg} x - \cos^2 x = \sin^2 x;$

$$1 + \operatorname{ctg} x = \cos^2 x + \sin^2 x; \quad 1 + \operatorname{ctg} x = 1;$$

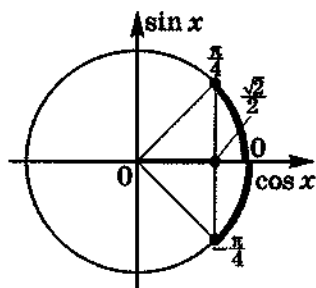
$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

2) $\cos x - \cos^2 x + \operatorname{ctg} 45^\circ = \sin^2 x + \sin 45^\circ;$

$$\cos x + 1 = \cos^2 x + \sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$

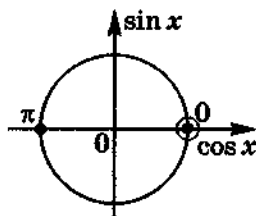


$$3) \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x \neq 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z};$$

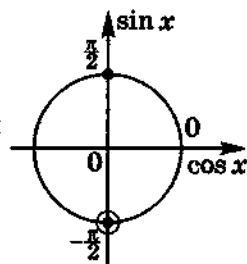
$$x = \pi + 2\pi k \quad | k \in \mathbb{Z}.$$



$$4) \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x + 1} = 0.$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad | k \in \mathbb{Z}.$$

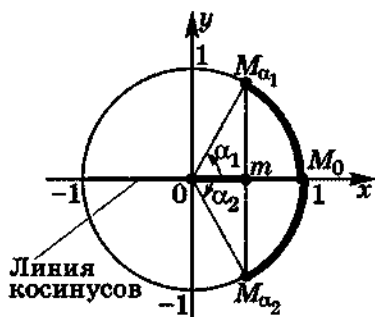


3

Решение простейших уравнений

Уравнения вида $\cos x = m$

Решить такое уравнение — значит найти все значения углов, косинус которых равен числу m .



Пусть x — множество всех таких углов.

Обозначим $x = \text{Arccos } m$ — читается это так: множество всех углов, косинус которых равен числу m .

Очевидно, что условие разрешимости уравнения

$|m| \leq 1$, т.е. $-1 \leq m \leq 1$, так как иначе нет пересечения с единичной окружностью.

Так как $\alpha_2 = -\alpha_1$, то запись может быть иной.

$x = \text{Arccos } m = \pm \alpha_1 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Так как на отрезке $[0; \pi]$ косинус принимает все значения от -1 до 1 только один раз, введем обозначение главного угла $\alpha_1 = \arccos m$, принадлежащего $[0; \pi]$, косинус которого равен m .

1. Определение. Арккосинусом числа m называется главная дуга или угол $\arccos m$, принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен числу m .

Отметим очень важные свойства:

1. По определению $\cos(\arccos m) = m$.

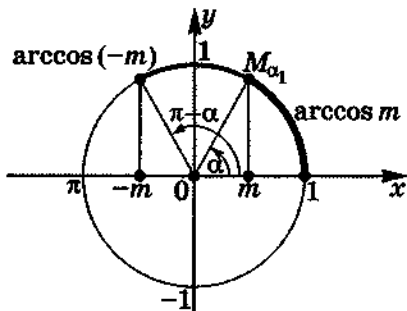
Тогда $\text{Arccos } m = \pm \arccos m + 2\pi k$,

т. е. $\boxed{x = \pm \arccos m + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}}$.

2. $\boxed{\arccos(-m) = \pi - \arccos m}$.

Примечание. В функциях и уравнениях дуги и углы изменяются в радианной мере, т. е. являются числами.

Представим графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\cos x = m$

1) $\cos x = \frac{3}{4}$; $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$,

по $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

Тогда $x = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

$$3) \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, \text{ тогда}$$

$$x = \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\pi k, \text{ но } \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Значит } x = \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k.$$

$$\text{Итак, } x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2};$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \pm \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + 2\pi k, \text{ но}$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\text{Тогда } 2x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \text{ значит}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \text{ т. е. } x = -\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

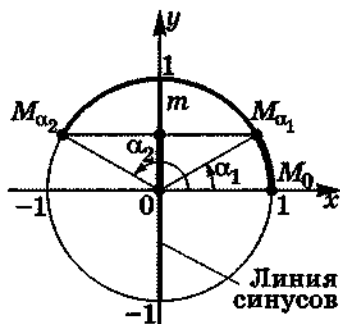
$$5) (3 \cos x + \pi)(4 \cos x - \pi) = 0;$$

$$\begin{cases} 3 \cos x + \pi = 0 \\ 4 \cos x - \pi = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{\pi}{3} \notin [-1; 1] \quad (\pi > 3) \\ \cos x = \frac{\pi}{4} \in [-1; 1] \end{cases}.$$

$$\text{Итак, } \cos x = \frac{\pi}{4}, \text{ значит } x = \pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения вида $\sin x = m$

Решить такое уравнение — значит найти все значения углов, синус которых равен числу m .



Пусть x — множество всех таких углов.

Обозначим $x = \text{Arcsin } m$ — читается это так: множество всех углов, синус которых равен числу m .

Очевидно, что условие разрешимости уравнения $|m| \leq 1$, т. е. $-1 \leq m \leq 1$, иначе пересечения с единичной окружностью нет.

$$x = \text{Arcsin } m = \begin{cases} \alpha_1 + 2\pi k, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}; \\ \alpha_2 + 2\pi k, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

($\{$ — знак составной функции, т. е. состоящей в данном случае из двух частей.)

Так как $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, то получим две серии решений:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + 2\pi k \\ x = \pi - \alpha_1 + 2\pi k \end{cases} \text{ или } \boxed{x = (-1)^k \alpha_1 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}}.$$

Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус принимает все значения от -1 до 1 только один раз, то введем главный угол $\alpha_1 = \arcsin m$ из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m .

II. Определение. Арксинусом числа m называется главная дуга или угол $\arcsin m$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу m .

Отметим очень важные свойства:

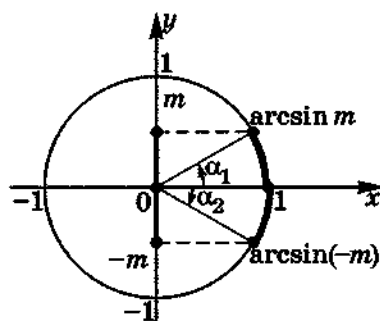
1. $\sin(\arcsin m) = m$ (по определению).

Тогда
$$\begin{cases} x = \arcsin m + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin m + 2\pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}$$

или
$$x = (-1)^k \arcsin m + \pi k \quad | k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\arcsin(-m) = -\arcsin m.$

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\sin x = m$

1) $\sin x = \frac{2}{3}; \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k \quad | k \in \mathbb{Z}.$

2) $\sin x = -\frac{1}{2}; \quad x = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \text{ но}$

$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}.$ Тогда

$x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, \text{ т.е. } x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \quad | k \in \mathbb{Z}.$

$$3) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \text{ но } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тогда } 2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, \text{ но}$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}. \text{ Тогда}$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \pi k; \quad 3x = -\frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) (3 \sin 2x - 2)(\sqrt{2} \sin x - 2) = 0;$$

$$\begin{cases} 3 \sin 2x - 2 = 0 \\ \sqrt{2} \sin x - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin 2x = \frac{2}{3} \in [-1; 1]; \\ \sin x = \sqrt{2} \notin [-1; 1] \end{cases};$$

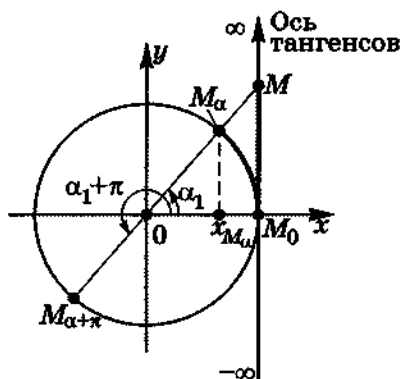
$$\sin 2x = \frac{2}{3}; \quad 2x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения вида $\operatorname{tg} x = m$

Как было доказано (см. определение $\operatorname{tg} \alpha$), прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(1; 0)$ — есть ось тангенсов, значит $m = MM_0 = \operatorname{tg} \alpha$.

$x = \operatorname{Arctg} m$ — множество всех дуг или углов, тангенс которых равен числу m .



Так как на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс пробегает все значения от $-\infty$ до ∞ только один раз, то положим $\operatorname{arctg} m = \alpha_1$ главным углом из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен m .

III. Определение. Арктангенсом числа m называется главная дуга или угол $\operatorname{arctg} m$, принадлежащий интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу m .

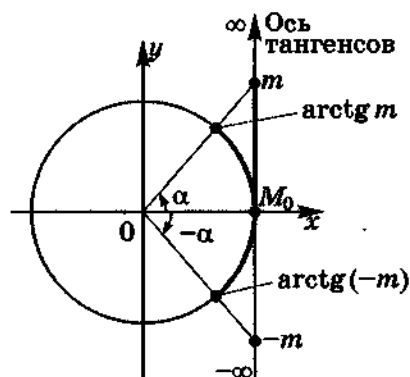
Отметим очень важные свойства:

1. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m$ (по определению).

Тогда $x = \operatorname{arctg} m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m$.

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\operatorname{tg} x = m$

1) $\operatorname{tg} x = 2$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi k$, но

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}, \text{ значит } x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

3) $\operatorname{tg} 2x = 1$; $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k$, но

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ значит } 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

4) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$; $3x - \frac{3}{4}\pi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k$,

$$\text{но } \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тогда } 3x - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad 3x = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3} + \pi k;$$

$$3x = \frac{13}{12}\pi + \pi k, \text{ т. е. } x = \frac{13}{36}\pi + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

5) $2\sin x + 3\cos x = 0$;

$$2\sin x = -3\cos x. \text{ Разделим на } 2\cos x \neq 0:$$

$$\operatorname{tg} x = -1,5; \quad x = \operatorname{arctg}(-1,5) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

6) $\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

$$3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Разделим на } 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0:$$

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k;$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения вида $\operatorname{ctg} x = m$ 

Как было уже доказано, прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0; 1)$, есть ось котангенсов, значит $m = M_0M = \operatorname{ctg} \alpha$.

$x = \operatorname{Arcctg} m$ — множество всех дуг или углов, котангенс которых равен числу m .

Так как на интервале $(0; \pi)$ котангенс пробегает все свои значения только один раз, то обозначим $\operatorname{arctg} m = \alpha_1$ главным углом из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен m .

IV. Определение. Арккотангенсом числа m называется главная дуга или угол $\operatorname{arctg} m$, принадлежащий интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен числу m .

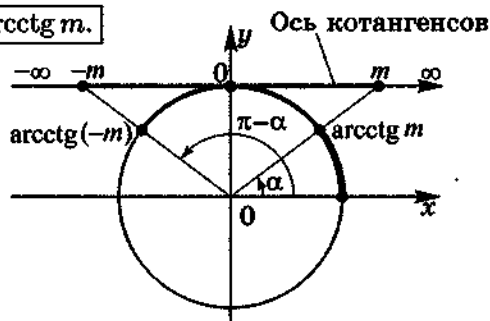
Отметим очень важные свойства:

1. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m$ (по определению).

Тогда $x = \operatorname{arctg} m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{arctg}(-m) = \pi - \operatorname{arctg} m$.

Приведем графическую иллюстрацию:



Примеры решения уравнений вида $\operatorname{ctg} x = m$

1) $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}; \quad x = \operatorname{arccctg} \left(-\frac{2}{3} \right) + \pi k$, но

$$\operatorname{arccctg} \left(-\frac{2}{3} \right) = \pi - \operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{3} \right).$$

Тогда $x = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{2}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arccctg} \sqrt{3} + \pi k$, но

$$\operatorname{arccctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

3) $\operatorname{ctg} 2x = 3; \quad 2x = \operatorname{arccctg} 3 + \pi k$, тогда

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 3 + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

4) $\operatorname{ctg} \left(3x - \frac{5}{6}\pi \right) = -1;$

$$3x - \frac{5}{6}\pi = \operatorname{arccctg}(-1) + \pi k, \text{ но}$$

$$\operatorname{arccctg}(-1) = \pi - \operatorname{arccctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\text{Тогда } 3x - \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{4}\pi + \pi k, \text{ т. е. } 3x = \frac{5}{6}\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi k.$$

$$\text{Итак, } x = \frac{1}{3} \cdot \frac{38}{24}\pi + \frac{\pi}{3}k; \quad x = \frac{19}{36}\pi + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Практикум 5

1. Упростите:

$$1) \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$2) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha}.$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha;$$

$$2) \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x;$$

$$3) \frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \\ = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha).$$

3. Вычислите:

$$1) \cos \alpha \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}, \text{ если } 90^\circ < \alpha < 180^\circ;$$

$$2) \sec \alpha \text{ при } \sin \alpha = -\frac{7}{25}, \text{ если } 270^\circ < \alpha < 360^\circ;$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} \text{ при } \sin \alpha = -0,5, \text{ если } -90^\circ < \alpha < 0^\circ;$$

$$4) \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \text{ при } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3};$$

$$5) \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3;$$

$$6) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

4. Решите уравнения:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$

2) $2\sin\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2};$

3) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right);$

4) $4\sin^3 x = \sin x;$

5) $4\cos^3 x - \cos x = 0;$

6) $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0;$

7) $\frac{1 + \cos 3x}{2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x} = 0;$

8) $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$

Решение практикума 5

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \\
 & = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha}} + \frac{\sin \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \\
 & = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \\
 & = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)}{1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \\
 & = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha)}{1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\text{при } \cos \alpha \cdot \sin \alpha \neq -1; \quad \left[\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = -1 \\ \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} \right] \emptyset,$$

т.е. не существует α , при котором $\cos \alpha \cdot \sin \alpha = -1$.

2. Докажите тождества:

$$1) \quad \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha;$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\
 &= 1 - \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \sin^2 \alpha \\
 \Pi &= \sin^2 \alpha \quad \left| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} ; \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}. \right.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} &= \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1} = \\ &= \frac{(\sin x + \cos x) \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sin x + \cos x \\ \Pi &= \sin x + \cos x \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi \right.$$

$$\text{при } \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)} &= \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha)(\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)}{(\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \\ &= \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} &= \\ &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha; \text{ поэтому} \end{aligned}$$

$$L = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha);$$

$$\left. \begin{aligned} L &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \\ \Pi &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi \text{ при}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \alpha &\neq \cos \alpha; & \alpha &\neq \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha &\neq 1, \text{ так как иначе} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha &= 1 \\ \cos \alpha &= 1 \\ \sin \alpha &= -1 \\ \cos \alpha &= -1 \end{aligned} \right. \quad \emptyset,$$

то всегда $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 1$.

Таким образом, при $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$ данное равенство — тождество.

3. Вычислите:

- 1) $\cos \alpha$ при $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

$\alpha \in \text{II}$ четверти, значит $\cos \alpha < 0$.

$$\boxed{\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (1.5) \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, тогда

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

- 2) $\sec \alpha$ при $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

$\alpha \in \text{IV}$ четверти, тогда $\sec \alpha > 0$;

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \left(\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \right);$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{625 - 49}{625}}} = \frac{1}{\frac{24}{25}} = \boxed{\frac{25}{24}}.$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} \text{ при } \sin \alpha = -0,5, \text{ если } -90^\circ < \alpha < 0^\circ;$$

$\alpha \in \text{IV}$ четверти, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha < 0$;

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \left(\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha; \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}} \quad (17) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,5}{\sqrt{1 - (-0,5)^2}} = -\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Итак, } \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

$$4) \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \text{ при } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha \cdot \left(3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4 \right)}{\cos \alpha \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha + 4}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{-1 + 4}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = \boxed{2,25}. \end{aligned}$$

$$5) \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha &= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \\ &= (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Так как } (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 9,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 9;$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 9;$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7, \text{ то}$$

$$\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha = 3 \cdot (7 - 1) = \boxed{18}.$$

6) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ &= 1 \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 1 - 2 \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

Так как $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}$, тогда

$$1 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5};$$

Следовательно, $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \boxed{\frac{3}{5}}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

4. Решите уравнения:

$$1) \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3} \right) = 1;$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3} = 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$2) 2 \sin \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2};$$

$$\sin \left(\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{4} - \frac{1}{2} &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]; \quad \left[\begin{aligned} \frac{3x}{4} &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} &= \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} + 2\pi n \end{aligned} \right];$$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi + 2}{3} + \frac{8\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{3\pi + 2}{3} + \frac{8\pi}{3}n \mid n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right].$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi + 2}{3} + \frac{8\pi}{3}k; \frac{3\pi + 2}{3} + \frac{8\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$3) \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right);$$

$$\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}; \quad x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5} + \pi k; \quad x = \frac{5\pi - 6\pi}{30} + \pi k;$$

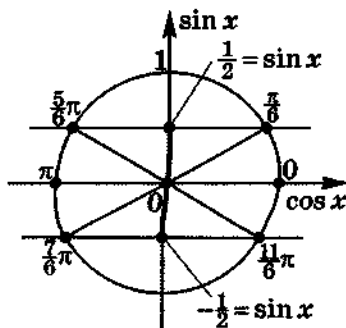
$$x = -\frac{\pi}{30} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ -\frac{\pi}{30} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) 4 \sin^3 x = \sin x;$$

$$4 \sin^3 x - \sin x = 0; \quad \sin x(4 \sin^2 x - 1) = 0;$$

$$\sin x(2 \sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0;$$



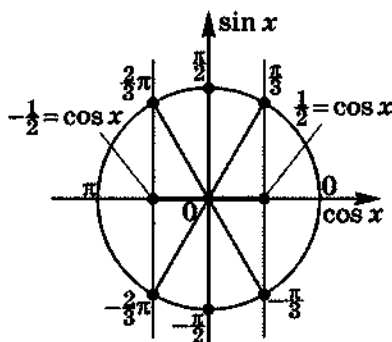
$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0; \\ 2 \sin x + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) 4 \cos^3 x - \cos x = 0;$$

$$\cos x(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0;$$



$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0.$$

$$\begin{cases} 1 + \cos 2x = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \emptyset.$$

Ответ: решений нет.

$$7) \frac{1 + \cos 3x}{2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x} = 0;$$

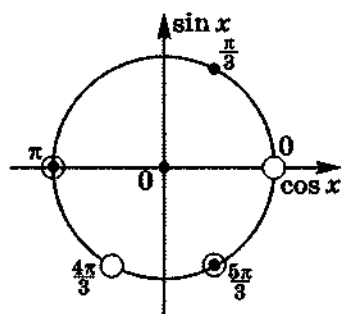
$$\begin{cases} 1 + \cos 3x = 0 \\ 2 \sin x \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 3x = -1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x = \pi + 2\pi k \\ x \neq \pi n \\ x \neq (-1)^{t+1} \frac{\pi}{3} + \pi t \end{cases},$$

$$\text{т. е. } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k.$$

С учетом исключений
(см. рисунок) получаем
ответ.

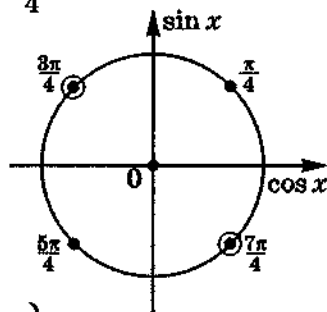
$$\text{Ответ: } \left\{ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



$$8) \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}.$$



$$\text{Ответ: } \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4

Основные тригонометрические формулы

Формулы приведения

Для решения тригонометрических задач будут использоваться следующие формулы приведения:

$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

3.1 – 3.12

$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

3.13 – 3.24

$\cos(\alpha + 270^\circ) = \sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\cos(\alpha - 270^\circ) = -\sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(\alpha - 270^\circ) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

3.25 – 3.36

Конечно, запоминать все эти формулы не пужно, достаточно понять простые правила:

1. Если изменение угла α происходит на 90° ; 270° ; ...; $(2k-1) \cdot 90^\circ$, то название тригонометрических функций меняется на ко-функцию, т.е. косинус на синус и наоборот, тангенс на котангенс и наоборот.
2. Если изменение угла происходит на 180° ; 360° ; ...; $180^\circ \cdot k$, то название функций не меняется.
3. Знак полученной после упрощения функции определяется по знаку исходной функции в левой части равенства в зависимости от того, в какой четверти функция была задана, полагая, что α принадлежит I четверти.

Аналогичное правило выполняется для углов, заданных в радианной мере. Обобщим:

1. $\sin(\alpha + \pi n) = \begin{cases} -\sin \alpha, & n - \text{нечетное} \\ \sin \alpha, & n - \text{четное} \end{cases};$
2. $\cos(\alpha + \pi n) = \begin{cases} -\cos \alpha, & n - \text{нечетное} \\ \cos \alpha, & n - \text{четное} \end{cases};$
3. $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z};$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z};$
5. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = \begin{cases} \cos \alpha, & n - \text{нечетное} \\ -\cos \alpha, & n - \text{четное} \end{cases};$
6. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = \begin{cases} -\sin \alpha, & n - \text{нечетное} \\ \sin \alpha, & n - \text{четное} \end{cases};$
7. $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z};$
8. $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}(2n-1)\right) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

Практикум 6

1. Докажете тождества:

$$1) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)[\cos(360^\circ + \alpha) - \sin \alpha] + \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha;$$

$$2) \frac{\sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + 1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)} - \frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)} + \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5};$$

$$3) \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \pi) - \sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) + \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \sin \alpha;$$

$$4) \frac{2 - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - 2 \cos^2(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -1.$$

2. Решите уравнения:

$$1) 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0;$$

$$2) \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) - 1 = 0;$$

$$3) 3 \operatorname{tg}\left(x + \frac{5\pi}{36}\right) + \sqrt{3} = 0;$$

$$4) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0;$$

$$5) \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0;$$

$$6) 6 \sin^2 x - \sin x - 2 = 0;$$

$$7) 8 \sin^2 x - (6 - 4\sqrt{3}) \sin x - 3\sqrt{3} = 0;$$

$$8) 2 \cos^2 x + \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x = 0;$$

$$9) 1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0;$$

$$10) 4 \sin^3 2x = \sin 2x;$$

$$11) 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 3 \sin(1,5\pi + x);$$

$$12) 2 \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0;$$

$$13) 2 \cos(x - 1,5\pi) - 5 \cos(x + \pi) = 0;$$

$$14) \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0;$$

$$15) 2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1;$$

$$16) \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0;$$

$$17) \frac{1 - 2 \cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0;$$

$$18) \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0.$$

3. Решите неравенства:

$$1) \sqrt{2} - 2 \sin x > 0;$$

$$2) \cos x > -\frac{1}{2};$$

$$3) 2 \sin x + \sqrt{3} \geq 0;$$

$$4) 2 \cos x \leq \sqrt{2}.$$

Решение практикума 6

1. Докажите тождества:

$$1) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)[\cos(360^\circ + \alpha) - \sin \alpha] + \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha.$$

$$L = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)[\cos(360^\circ + \alpha) - \sin \alpha] + \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \quad (3.11)$$

$$= \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + 1}{1 + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha; \quad \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \alpha \\ \Pi &= \sin \alpha \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \frac{\sqrt{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} \right) + 1}}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) - \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right)} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) - \operatorname{cosec} \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right)} + \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}.$$

$$a) \frac{\sqrt{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) + 1}}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) - \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right)} = \quad (3.5)$$

$$= \frac{\sqrt{2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} + 1}}{\sin^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5}}}{\sin^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \quad (3.3)$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5}}{\left(\sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \right) \left(\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}};$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)} = \\
 & = \frac{2}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)\right)^{-1} - \left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right)^{-1}} = \\
 & = \frac{2}{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}.
 \end{aligned}$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + 1}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)} - \\
 & \quad - \frac{2}{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)} + \cos \frac{\pi}{5} = \\
 & = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} - \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} + \cos \frac{\pi}{5} = \\
 & = \frac{1 - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} + \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}\right)^2}{\sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} + \cos \frac{\pi}{5} = \\
 & = \sin \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \sin \frac{\pi}{5} \\ \Pi &= \sin \frac{\pi}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \pi) - \sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) + \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \\
 & - \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \pi) - \sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) + \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \\
 &\quad - \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \\
 &= \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}} + \operatorname{tg} \alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) = \\
 &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}} = \\
 &= \sin \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha}\right)}{\frac{1}{\sin \alpha}(\cos \alpha + 1)} = \\
 &= \sin \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha; \quad \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = \sin \alpha \\
 \Pi = \sin \alpha
 \end{aligned}
 \Bigg| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \frac{2 - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - 2 \cos^2(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -1.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{2 - \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - 2 \cos^2(\pi - \alpha)} + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\
 &= \frac{2 - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{1 - 2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{1 - 2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha = \\
 &= \frac{\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}}{1 - 2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\
 &= \frac{-1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} L = -1 \\ \Pi = -1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \begin{cases} \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \quad 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0. \quad \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{12} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \quad \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) - 1 = 0. \quad \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) = 1;$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{1}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \quad 3 \operatorname{tg} \left(x + \frac{5\pi}{36} \right) + \sqrt{3} = 0. \quad \operatorname{tg} \left(x + \frac{5\pi}{36} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x + \frac{5\pi}{36} = -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{11\pi}{36} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{11\pi}{36} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right), \text{ тогда } \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1.$$

$$x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{5\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 0.$$

$$\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = -\sqrt{3}; \quad x + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) 6 \sin^2 x - \sin x - 2 = 0.$$

Очевидно, что здесь квадратное уравнение.

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2}; \\ \sin x = \frac{2}{3}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi k; (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) 8 \sin^2 x - (6 - 4\sqrt{3}) \sin x - 3\sqrt{3} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\sin x)_{1,2} &= \frac{-2\sqrt{3} + 3 \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 9}}{8} = \\ &= \frac{-2\sqrt{3} + 3 \pm (2\sqrt{3} + 3)}{8}; \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin x = \frac{3}{4}; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^n \arcsin \left(\frac{3}{4} \right) + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k; (-1)^n \arcsin \left(\frac{3}{4} \right) + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Однородным тригонометрическим уравнением n -й степени называется уравнение вида

$$A_0 \sin^n x + A_1 \sin^{n-1} x \cos x + A_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + A_n \cos^n x = 0.$$

Примечания.

1. При $n = 1$ $A_0 \sin x + A_1 \cos x = 0$ — уравнение первой степени.

При $n = 2$ $A_0 \sin^2 x + A_1 \sin x \cdot \cos x + A_2 \cos^2 x = 0$ — уравнение второй степени и т. д.

2. Если в однородном уравнении $\sin x = 0$, то тогда и $\cos x = 0$ и наоборот, что одновременно выполняться не может. Значит, возможно поделить обе части уравнения на $(\sin x)^k$ или $(\cos x)^k$ ($k \leq n$), и при этом потери корней не произойдет.

8) $2 \cos^2 x + \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x = 0.$

Здесь мы имеем дело с однородным уравнением. Поделим обе части уравнения на $\sin^2 x$, получим

$$2 \operatorname{ctg}^2 x + 1 - 3 \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$(\operatorname{ctg} x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4};$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 1 \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \\ x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

9) $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0.$

$$1 + \sin x - (\sin x \cdot \cos x + \cos x) = 0;$$

$$1 + \sin x - \cos x(\sin x + 1) = 0; \quad (\sin x + 1)(1 - \cos x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \quad 4 \sin^3 2x = \sin 2x.$$

$$\sin 2x(2 \sin 2x - 1)(2 \sin 2x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \pi k \\ 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ 2x = (-1)^t \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi t \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} k \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n \\ x = (-1)^t \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{2} t \end{cases} \quad | \quad k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} k; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n; \right. \\ \left. (-1)^t \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{2} t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) \quad 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 3 \sin(1,5\pi + x).$$

$$2 \sin^2 x = -3 \cos x; \quad 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0;$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4};$$

$$a) \quad \cos x = 2;$$

$$2 \notin E(y = \cos x); \quad 2 \notin [-1; 1],$$

тогда $x \in \emptyset$.

$$б) \quad \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$12) \quad 2 \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0.$$

$$\cos x \cdot (2 \cos x - \sin x) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} 2 + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$13) \quad 2 \cos(x - 1,5\pi) - 5 \cos(x + \pi) = 0.$$

$$-2 \sin x + 5 \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 2,5;$$

$$x = \operatorname{arctg}(2,5) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ \operatorname{arctg}(2,5) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$14) \quad \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0.$$

$$\sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$15) \quad 2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1.$$

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1;$$

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1; \quad 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 1;$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}; \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

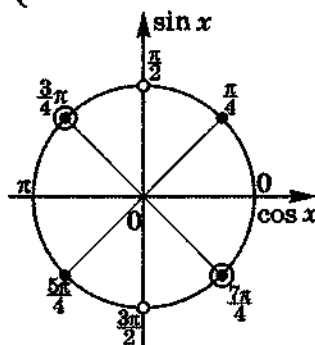
$$\text{Можно объединить: } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi t \mid t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi t \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$16) \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \quad | k, t, n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};$$



$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$17) \frac{1 - 2 \cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0.$$

$$\begin{cases} 1 - 2 \cos 2x = 0 \\ \cos 2x - 2 \neq 0 \end{cases}; \quad 2 \notin E(y = \cos x); \quad 2 \notin [-1; 1];$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

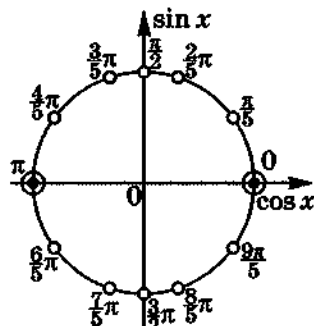
$$18) \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 5x} = 0.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 5x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \mid k, t, n \in \mathbb{Z}; \\ 5x \neq \pi n \end{cases} \quad x \in \emptyset.$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x \neq \frac{\pi}{5} n \end{cases}$$

При n , кратном 5, $\pi k = \frac{\pi}{5}n$,
поэтому уравнение решений
не имеет.

Ответ: решений нет.



3. Решите неравенства:

$$1) \sqrt{2} - 2 \sin x > 0.$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} < 0; \quad \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Исходя из построения на
тригонометрической окруж-
ности может показаться, что,

с одной стороны, $x < \frac{\pi}{4}$, а с
другой, $x > \frac{3\pi}{4}$, и тогда выполняется двойное неравен-

ство $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}$ — но это ложь.

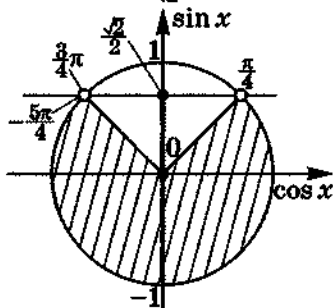
Учтем, что для $\forall \alpha$ выполняется $\sin(\alpha - 2\pi) = \sin \alpha$,
тогда $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$, и неравенство принимает

вид $-\frac{5}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}$ — верно.

Значит, учитывая полное число оборотов, получим

$$-\frac{5}{4}\pi + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

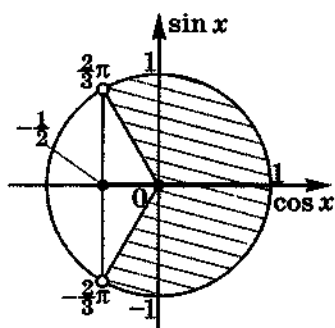
$$\text{Ответ: } \left\{ \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



$$2) \cos x > -\frac{1}{2}.$$

Исходя из построения на тригонометрической окружности $-\frac{2}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$, тогда, учитывая полное число оборотов, получаем

$$\frac{2}{3}\pi + 2\pi k > x > -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k.$$

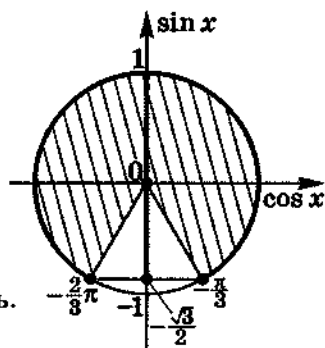


Ответ: $\left\{ \left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k; \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$3) 2\sin x + \sqrt{3} \geq 0.$$

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Исходя из построения на тригонометрической окружности может показаться, что $-\frac{2}{3}\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{3}$, но это — ложь.



Так как $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$, то $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\frac{4}{3}\pi$, и $\frac{4\pi}{3} \geq x \geq -\frac{\pi}{3}$ — верно. Значит, учитывая полное число оборотов, получим $\frac{4}{3}\pi + 2\pi k \geq x \geq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{ \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4}{3}\pi + 2\pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$4) \quad 2 \cos x \leq \sqrt{2}.$$

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Исходя из построения на тригонометрической окружности может показаться, что

$x \geq \frac{\pi}{4}$ и $x \leq -\frac{\pi}{4}$, получим

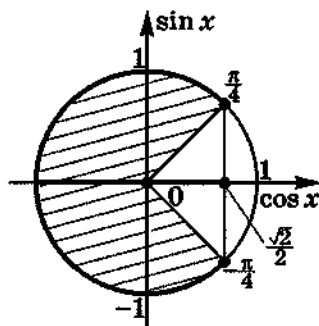
$-\frac{\pi}{4} \geq x \geq \frac{\pi}{4}$, но это — ложь.

Так как $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, то $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{7}{4}\pi$, и

$\frac{7\pi}{4} \geq x \geq \frac{\pi}{4}$ — верно. Значит, учитывая полное число

оборотов, получим $\frac{7}{4}\pi + 2\pi k \geq x \geq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{ \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7}{4}\pi + 2\pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Тренировочная работа 5

1. Докажите тождества (без указания условий существования):

$$1) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$2) \frac{\cos^2(90^\circ + x)}{\cos(x + 180^\circ) + \cos(90^\circ - x)} - \frac{\sin(360^\circ + x) - \sin(x - 90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x + 90^\circ) - 1} = \sin x + \cos x;$$

$$3) \cos(360^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha - \sec \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha + \sec \alpha) = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = 0,5;$$

$$2) \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0;$$

$$3) 6 \cos^2 x + \cos x = 1;$$

$$4) 2 \sin \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2};$$

$$5) \cos \left(x - \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{5} \right);$$

$$6) 4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} = 0;$$

$$7) \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = -3;$$

$$8) 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0;$$

$$9) 6 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2;$$

$$10) 3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$11) \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0;$$

$$12) \frac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0;$$

$$13) \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2;$$

$$14) 2 \sin^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0;$$

$$15) \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0;$$

$$16) \operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x - \cos x + 1 = 0;$$

$$17) 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = 4 \cos(1,5\pi - x);$$

$$18) \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0.$$

Решение тренировочной работы 5

1. Докажите тождества (без указания условий существования):

$$1) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha}{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \Pi &= 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{\cos^2(90^\circ + x)}{\cos(x + 180^\circ) + \cos(90^\circ - x)} - \frac{\sin(360^\circ + x) - \sin(x - 90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x + 90^\circ) - 1} = \sin x + \cos x.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2(90^\circ + x)}{\cos(x + 180^\circ) + \cos(90^\circ - x)} - \\ &\quad - \frac{\sin(360^\circ + x) - \sin(x - 90^\circ)}{\operatorname{ctg}^2(x + 90^\circ) - 1} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{(\sin x + \cos x) \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \\
 &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \sin x + \cos x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \sin x + \cos x \\
 \Pi &= \sin x + \cos x \quad \Big| \Rightarrow L = \Pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad &\cos(360^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha - \sec \alpha) + \\
 &+ \cos(90^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha + \sec \alpha) = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \cos(360^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha - \sec \alpha) + \\
 &+ \cos(90^\circ - \alpha)(\operatorname{cosec} \alpha + \sec \alpha) = \\
 &= \cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) + \sin \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \\
 &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1 + 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\Pi = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\begin{aligned}
 L &= \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \\
 \Pi &= \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \quad \Big| \Rightarrow L = \Pi.
 \end{aligned}$$

2. Решите уравнения:

$$1) \quad \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = 0,5.$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = 1,5\pi + 4\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Отвст: } \left\{ \frac{\pi}{6} + 4\pi k; 1,5\pi + 4\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Разделим обе части на $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 3 = 0; \quad \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{3}{\sqrt{3}};$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{\sqrt{3}} \right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right) + \pi k.$$

Так как $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то $x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$3) 6 \cos^2 x + \cos x = 1.$$

$$6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0;$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm 5}{12};$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}; \\ \cos x = \frac{1}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$4) \quad 2 \sin \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2}. \quad \sin \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}x = \frac{-2 + \pi}{4} + 2\pi k \\ \frac{3}{4}x = \frac{-2 + 3\pi}{4} + 2\pi n \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-2 + \pi}{3} + \frac{8\pi}{3}k \\ x = \frac{-2 + 3\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}n \end{array} \mid k, n \in \mathbb{Z}. \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{-2 + \pi}{3} + \frac{8\pi}{3}k; \frac{-2 + 3\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \quad \cos \left(x - \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{5} \right). \quad \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3}.$$

Зная, что $\operatorname{arcc tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$, и используя общую формулу решения уравнения $\operatorname{ctg} x = m$, получим

$$x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5} + \pi k;$$

$$x = \frac{11\pi}{30} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{11\pi}{30} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \quad 4 \cos^2 x + 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\cos x)_{1,2} &= \frac{-2(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{4 \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 - 16\sqrt{3}}}{8} = \\ &= \frac{-2\sqrt{3} - 2 \pm 2(\sqrt{3} - 1)}{8}; \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{array} \right];$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

7) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = -3.$

$$\operatorname{ctg} \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{3}{\sqrt{3}}; \quad 5x + \frac{\pi}{3} = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{3}{\sqrt{3}} \right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$5x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \pi k; \quad 5x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$5x = -\frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

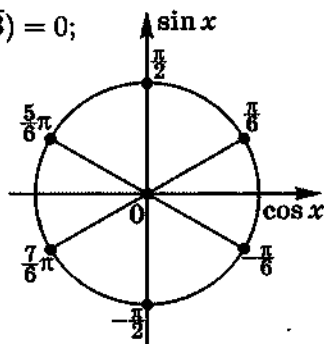
8) $4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0.$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) = 0;$$

$$\cos x (2 \cos x - \sqrt{3})(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos x - \sqrt{3} = 0; \\ 2 \cos x + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$



Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
или $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$9) \quad 6 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 2.$$

$$6 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 0;$$

$$4 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0;$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \quad 3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

$$3 \sin^2 x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$3(1 - \cos^2 x) - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$3 - 3 \cos^2 x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$$

$$-\cos^2 x - 2 \cos x + 3 = 0; \quad \cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0.$$

По теореме Виста

$$\begin{cases} \cos x = -3 \notin [-1; 1] \\ \cos x = 1 \end{cases}; \quad \cos x = 1; \quad x = 2\pi k | k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$11) \quad \sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0.$$

$$\cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0; \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$12) \frac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - \cos 4x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}; \\ 4x \neq 2\pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \emptyset.$$

Ответ: уравнение решения не имеет.

$$13) \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin^2 x = 2;$$

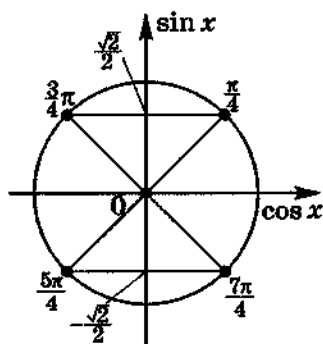
$$1 + 2 \sin^2 x = 2; \quad 2 \sin^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2};$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z} \right\}.$



$$14) 2 \sin^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0.$$

$$\sin x (2 \sin x - \cos x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \sin x - \cos x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 - \operatorname{ctg} x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi n | n \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arccotg} 2 + \pi k | k \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

Ответ: $\{\pi n; \operatorname{arccotg} 2 + \pi k | k, n \in \mathbb{Z}\}.$

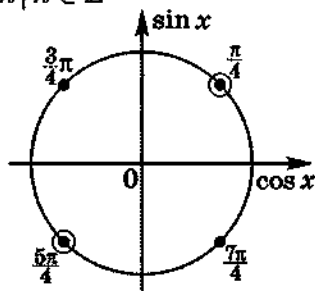
$$15) \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0; \\ \sin 2x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi t | t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi t | t \in \mathbb{Z} \right\}.$$



$$16) \operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x - \cos x + 1 = 0.$$

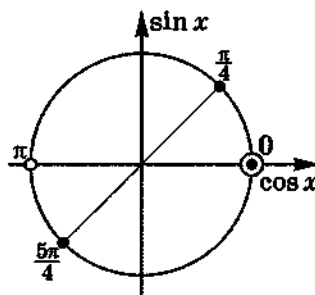
$$\operatorname{ctg} x (\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0; \quad (\cos x - 1)(\operatorname{ctg} x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \operatorname{ctg} x = 1; \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi k | k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq \pi t | t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \right\}.$$



$$17) 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = 4 \cos(1,5\pi - x).$$

$$3 \cos x = 4 \cdot (-\sin x); \quad 3 \cos x + 4 \sin x = 0; \quad 3 + 4 \operatorname{tg} x = 0;$$

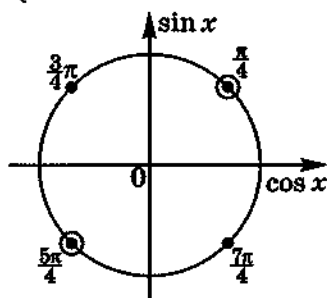
$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}; \quad x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi k | k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi k | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$18) \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x - \sin x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k | k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi t | t \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi t | t \in \mathbb{Z} \right\}.$

Теоремы сложения

Напомним теоремы сложения.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad (4.1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha; \quad (4.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta; \quad (4.3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta; \quad (4.4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{array} \right. \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}; \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{array} \right. \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Практикум 7

1. Вычислите:

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$;
- 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\sin \beta = \frac{7}{25}$ при $90^\circ < \beta < 180^\circ$;
- 3) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$, если $\sec \alpha = \frac{25}{24}$ при $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

2. Вычислите:

- 1) $\sin 75^\circ$;
- 2) $\sin 127^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 194^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 383^\circ$;
- 3) $\cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha)$;
- 4) $\sin(65^\circ + \alpha)$, если $\sin(20^\circ + \alpha) = 0,6$ при $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

3. Упростите:

1) $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta;$

2)
$$\frac{\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)};$$

3)
$$\frac{\cos \frac{\pi}{30} \cdot \cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \cdot \sin \frac{\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{30} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{30} \cdot \sin \frac{4\pi}{15}};$$

4)
$$\frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{15}}.$$

4. Докажите:

1) $\sin(30^\circ + x) \cdot \cos x - \cos(30^\circ + x) \cdot \sin x = \frac{1}{2};$

2) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 1 = \sec 2\alpha;$

3) $\alpha + \beta = 45^\circ$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7}$ при $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,
 $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

5. Решите уравнения:

1) $\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 0;$

2)
$$\frac{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \sqrt{3};$$

3) $\cos(m + x) - \cos(m - x) = 0;$

4) $\cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sqrt{3} \sin x;$

5)
$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{12} - x \right) - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x}{\sin \left(\frac{\pi}{12} - x \right) + 2 \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin x} = 1;$$

6) $\operatorname{tg}^2 x - 5 \sec x + 7 = 0;$

7) $2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0.$

Решение практикума 7

1. Вычислите:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$.

4.4

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad 1.4$$

$\alpha \in \text{III}$ четверти, т. е. $\cos \alpha < 0$, значит

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - (-0,6)^2} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \boxed{-\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}}.$$

2) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\sin \beta = \frac{7}{25}$ при $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Так как $\beta \in \text{II}$, значит $\cos \beta < 0$.

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = -\frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{7}{24};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \quad 4.6$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{24}\right)}{2 + \frac{7}{24}} = \frac{24 - 14}{48 + 7} = \frac{10}{55} = \boxed{\frac{2}{11}}.$$

3) $\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$, если $\sec \alpha = \frac{25}{24}$ при $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

$$\sec \alpha = \frac{25}{24}; \quad \cos \alpha = \frac{24}{25};$$

$\alpha \in \text{I}$, значит $\sin \alpha > 0$.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7}{24};$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad 4.6$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \frac{7}{24}}{1 + \frac{7}{24}} = \boxed{\frac{17}{31}}.$$

2. Вычислите:

1) $\sin 75^\circ =$

$$= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \quad 4.1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}.$$

2) $\sin 127^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 194^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 383^\circ.$

a) $\sin 127^\circ = \sin(37^\circ + 90^\circ) = \cos 37^\circ;$

б) $\cos 194^\circ = \cos(14^\circ + 180^\circ) = -\cos 14^\circ;$

в) $\cos 383^\circ = \cos(23^\circ + 360^\circ) = \cos 23^\circ.$

$$\begin{aligned} & \sin 127^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 194^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 383^\circ = \\ & = \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ - \cos 14^\circ = \\ & = -\cos 14^\circ + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ & = -\cos(37^\circ - 23^\circ) + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ & = -\cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \cdot \sin 23^\circ + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ & = -\sin 37^\circ \cdot \sin 23^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ & = \cos(37^\circ + 23^\circ) = \cos 60^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3) $\cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha).$

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos(150^\circ - \alpha) &= \cos 150^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 150^\circ \cdot \sin \alpha = \quad 4.4 \\ &= \cos(180^\circ - 30^\circ) \cdot \cos \alpha + \sin(180^\circ - 30^\circ) \cdot \sin \alpha = \\ &= -\cos 30^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 30^\circ \cdot \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos(210^\circ + \alpha) &= \cos(30^\circ + (180^\circ + \alpha)) = \\ &= \cos 30^\circ \cdot \cos(180^\circ + \alpha) - \sin 30^\circ \cdot \sin(180^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\cos \alpha) - \frac{1}{2} \cdot (-\sin \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Тогда } \cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha) = \\
 & = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \\
 & = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

- 4) $\sin(65^\circ + \alpha)$, если $\sin(20^\circ + \alpha) = 0,6$ при $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

$\cos(20^\circ + \alpha) > 0$, так как $20^\circ + \alpha \in \text{I четверти}$, тогда

$$\cos(20^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(20^\circ + \alpha)}, \text{ т. е.}$$

$$\cos(20^\circ + \alpha) = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8.$$

$$\begin{aligned}
 \sin(65^\circ + \alpha) &= \sin[45^\circ + (20^\circ + \alpha)] = \\
 &= \sin 45^\circ \cdot \cos(20^\circ + \alpha) + \cos 45^\circ \cdot \sin(20^\circ + \alpha) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(20^\circ + \alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(20^\circ + \alpha);
 \end{aligned}$$

$$\sin(65^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,8 + 0,6) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1,4 = \boxed{0,7\sqrt{2}}.$$

3. Упростите:

$$1) \sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \boxed{\sin \alpha \cdot \cos \beta}.$$

$$2) \frac{\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} =$$

$$= \frac{-\cos \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{-\cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{0}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = 0$$

$$\text{при } \begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \neq 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \alpha \neq \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \alpha \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \end{cases}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t | t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = 0$
при $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t | t \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\cos \frac{\pi}{30} \cdot \cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \cdot \sin \frac{\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{30} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{30} \cdot \sin \frac{4\pi}{15}} = \\ = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{30} \right)}{\sin \left(\frac{7\pi}{30} + \frac{4\pi}{15} \right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{30}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \boxed{\cos \frac{\pi}{30}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{15}} = \\ = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \right)}{-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} = \boxed{-2 \cos \frac{\pi}{10}}. \end{aligned}$$

4. Докажите:

$$1) \sin(30^\circ + x) \cdot \cos x - \cos(30^\circ + x) \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \sin(30^\circ + x) \cdot \cos x - \cos(30^\circ + x) \cdot \sin x = \\ &= \sin(30^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} \\ \Pi = \frac{1}{2} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 1 = \sec 2\alpha.$$

$$\begin{aligned} L = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 1 &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 1 = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \sec 2\alpha \\ \Pi = \sec 2\alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

Примечание. На будущее, если нет специального требования установить область определения равенства, то мы по умолчанию не будем выяснять множество, на котором данное равенство есть тождество.

$$3) \alpha + \beta = 45^\circ, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5} \text{ и } \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7} \text{ при } 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \\ 0^\circ < \beta < 90^\circ.$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7}; \text{ то } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{5}; \beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{14 + 15}{35 - 6} = \frac{29}{29} = 1,$$

тогда $\alpha + \beta = 45^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}$, по $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$,
тогда $\alpha + \beta = 45^\circ$, что и требовалось доказать.

5. Решите уравнения:

$$1) \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 0.$$

$$\sin(2x + x) = 0; \quad \sin 3x = 0; \quad 3x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \frac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3};$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \cos(m+x) - \cos(m-x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos m \cdot \cos x - \sin m \cdot \sin x - \cos m \cdot \cos x - \sin m \cdot \sin x &= 0; \\ -2 \sin m \cdot \sin x &= 0; \end{aligned}$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin m = 0; \quad m = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } x &= \pi k, \text{ если } m \neq \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}; \\ x &= \text{любое, если } m = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$4) \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \sin x.$$

$$\cos x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \sin x;$$

$$-\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$-\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + 2 \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin x} = 1.$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x}{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin x + 2 \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin x} = 1;$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin x}{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{12}} = 1; \quad \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{12}\right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{12}\right)} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 1; \quad x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \quad \operatorname{tg}^2 x - 5 \sec x + 7 = 0.$$

$$D(Y): \cos x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 7 = 0; \quad \sin^2 x - 5 \cos x + 7 \cos^2 x = 0;$$

$$6 \cos^2 x - 5 \cos x + 1 = 0;$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}; \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) \quad 2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0. \quad : \cos^2 x$$

($\cos x = 0$ не является корнем однородного уравнения).

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 6

1. Вычислите:

- 1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$.
- 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$
при $\pi < \alpha < 1,5\pi$;
- 3) $\alpha - \beta$, если $\sin \alpha = -\frac{40}{41}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{40}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
 $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

2. Вычислите:

- 1) $\frac{\sin 65^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ}$;
- 2) $\frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 213^\circ}{1 - \operatorname{tg} 192^\circ \cdot \operatorname{ctg} 237^\circ}$;
- 3) $\cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ)$;
- 4) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg} \frac{14\pi}{15} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}$.

3. Упростите:

- 1) $\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)$;
- 2) $\frac{\sin 65^\circ \cdot \cos 85^\circ - \sin 85^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ + \sin 55^\circ \cdot \sin 35^\circ}$;
- 3) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha}$;
- 4) $\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg} \beta} \cdot \frac{\cos(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}$ (не выясняя условия области определения выражения).

4. Докажите:

$$1) \cos(45^\circ - x) \cdot \cos x - \sin(45^\circ - x) \cdot \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2) \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha - 3) - \sin \alpha \cdot \cos(3 - \alpha)}{\cos\left(3 - \frac{\pi}{6}\right) - 0,5 \sin 3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 3;$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha$$

при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

5. Решите уравнения:

$$1) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 2x = 0,5;$$

$$2) 5 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 7 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$3) \sin\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0;$$

$$4) 3 \cos x = 8 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right);$$

$$5) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1;$$

$$6) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

Решение тренировочной работы 6

1. Вычислите:

$$1) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12} \text{ при } 1,5\pi < \alpha < 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{5}{12} - 1\right) \cdot \cos \alpha = \frac{-\sqrt{2} \cdot 17}{24} \cos \alpha = \\ &= -\frac{\sqrt{2} \cdot 17}{24} \cdot \frac{12}{13} = \boxed{-\frac{17\sqrt{2}}{26}}, \end{aligned}$$

так как $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, а $\alpha \in IV$, значит

$$\cos \alpha > 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{12}{13}.$$

$$2) \cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \alpha\right), \text{ если } \sin \alpha = -\frac{7}{25} \text{ при } \pi < \alpha < 1,5\pi.$$

$$\left[\begin{aligned} &\text{Так как } \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], \text{ то} \\ &\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arccos \frac{3}{5}, \text{ значит} \\ &\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \cos\left(\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \\ &= -\cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}; \\ &\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)} = \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}. \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(\arccos \left(-\frac{3}{5} \right) - \alpha \right) = \\
 & = \cos \left(\arccos \left(-\frac{3}{5} \right) \right) \cdot \cos \alpha + \sin \left(\arccos \left(-\frac{3}{5} \right) \right) \cdot \sin \alpha = \\
 & = -\frac{3}{5} \cos \alpha + \frac{4}{5} \sin \alpha = -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{24}{25} \right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{7}{25} \right) = \\
 & \left[\text{Так как } \alpha \in \text{III, } \cos \alpha < 0, \text{ то} \right. \\
 & \left. \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25} \right)^2} = -\frac{24}{25} \right] \\
 & = \frac{72 - 28}{125} = \boxed{\frac{44}{125}}.
 \end{aligned}$$

- 3) $\alpha - \beta$, если $\sin \alpha = -\frac{40}{41}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{40}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
 $180^\circ < \beta < 270^\circ$.

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ (1.7) $\alpha \in \text{IV}$, значит $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{40}{41}}{\sqrt{1 - \left(-\frac{40}{41} \right)^2}} = -\frac{\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}} = -\frac{40}{9}.$$

б) Так как $\begin{cases} 270^\circ < \alpha < 360^\circ \\ -270^\circ < -\beta < -180^\circ \end{cases}$, то $0 < \alpha - \beta < 180^\circ$.

в) Если $\alpha - \beta = 90^\circ$, то мы не можем воспользоваться формулой $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Проверим это равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{40}{9} - \frac{9}{40}}{1 + \frac{9}{40} \cdot \left(-\frac{40}{9} \right)} = \frac{-\frac{1681}{360}}{0}.$$

Значит, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ не существует, т. е. $\alpha - \beta = \boxed{90^\circ}$.

2. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\sin 65^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sin(65^\circ - 5^\circ)}{\cos(40^\circ - 10^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 213^\circ}{1 - \operatorname{tg} 192^\circ \cdot \operatorname{ctg} 237^\circ} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg}(180^\circ + 33^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(180^\circ + 12^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ - 33^\circ)} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 33^\circ} = \operatorname{tg}(12^\circ + 33^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$3) \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ).$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \cos(120^\circ - \alpha) &= \cos 120^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 120^\circ \cdot \sin \alpha = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \cos(\alpha + 60^\circ) &= \cos \alpha \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 60^\circ) &= \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg} \frac{14\pi}{15} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 + \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{15} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{15} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}} = \\
 &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \boxed{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

3. Упростите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) = \\
 &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) = \\
 &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \boxed{\cos \alpha \cdot \sin \beta}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{\sin 65^\circ \cdot \cos 85^\circ - \sin 85^\circ \cdot \cos 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 35^\circ + \sin 55^\circ \cdot \sin 35^\circ} = \\
 &= \frac{\sin(65^\circ - 85^\circ)}{\cos(55^\circ - 35^\circ)} = \frac{-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \boxed{-\operatorname{tg} 20^\circ}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\
 &= \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \boxed{\operatorname{tg} \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{ctg} \beta} \cdot \frac{\cos(\pi + \alpha)}{\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \beta \right)} = \\
 &= \frac{1}{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} \cdot \frac{-\cos \alpha}{\sin \beta} = \\
 &= \frac{\sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta) + \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{-\cos \alpha}{\sin \beta} = \\
 &= \frac{-\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta - \beta)} = \frac{-\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \boxed{-\cos(\alpha + \beta)}.
 \end{aligned}$$

4. Докажите:

$$1) \cos(45^\circ - x) \cdot \cos x - \sin(45^\circ - x) \cdot \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \cos(45^\circ - x) \cdot \cos x - \sin(45^\circ - x) \cdot \sin x = \\
 &= \cos(45^\circ - x + x) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Pi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha - 3) - \sin \alpha \cdot \cos(3 - \alpha)}{\cos\left(3 - \frac{\pi}{6}\right) - 0,5 \sin 3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 3.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha - 3) - \sin \alpha \cdot \cos(3 - \alpha)}{\cos\left(3 - \frac{\pi}{6}\right) - 0,5 \sin 3} = \\ &= \frac{\sin(\alpha - 3 - \alpha)}{\cos 3 \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} - 0,5 \sin 3} = \\ &= \frac{\sin(-3)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 3. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 3 \\ \Pi &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 3 \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha$$

$$\text{при } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} = \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha - |\cos \alpha| = \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha \end{aligned}$$

$$(\text{так как на } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \cos \alpha > 0).$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \sin \alpha \\ \Pi &= \sin \alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

5. Решите уравнения:

$$1) \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 2x = 0,5.$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3} + (-2x)\right) = 0,5;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0,5; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{(-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$2) 5 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 7 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x\right) = 7 \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{5}{2} \sin x = \frac{7}{2} \sin x - \frac{7\sqrt{3}}{2} \cos x;$$

$$6\sqrt{3} \cos x = \sin x; \quad \operatorname{tg} x = 6\sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arctg} 6\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{\operatorname{arctg} 6\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3) \sin\left(\frac{7\pi}{4} + x\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0.$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} \cdot \cos x + \cos \frac{7\pi}{4} \cdot \sin x - \sqrt{2} \sin x = 0;$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \sqrt{2} \sin x = 0;$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x; \quad \operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$4) \quad 3 \cos x = 8 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right).$$

$$3 \cos x = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - 8 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x;$$

$$3 \cos x = 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x; \quad 4\sqrt{3} \sin x = \cos x;$$

$$\operatorname{ctg} x = 4\sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arctg} 4\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ \operatorname{arctg} 4\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$5) \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 1.$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x = 1;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 1;$$

$$\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 1.$$

$$\text{Так как } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \text{ то}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Примечание.

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что:

$$3. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$4. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$6) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x};$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = 0; \quad \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x};$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x};$$

$$\cos x - \sin x = \cos x; \quad \sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Подстановкой можно убедиться, что корни уравнения принадлежат $D(Y)$:

при $x = \pi k$ $\operatorname{tg} x$ существует;

при $x = \pi k$ $\cos \pi k + \sin \pi k = \cos \pi k + 0 = \cos \pi k \neq 0$.

Ответ: $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Тригонометрические функции двойного и половинного угла

Напомним основные формулы двойного и половинного угла.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad (5.1)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad (5.2)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad (5.3)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad (5.4)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}; \quad (5.5)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}; \quad (5.6)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad (5.7)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad (5.8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad (5.9)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (5.10)$$

Примечание. Знаки определяются по тому, какой знак имеет тригонометрическая функция в левой части в данной четверти.

Практикум 8**1. Вычислите:**

1) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$;

2) $\sin(2\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin \beta = \frac{1}{2}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$,

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi;$$

3) $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{4}{5}\right)$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

5) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{161}{289}$ при $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$;

6) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

7) $\cos\left(\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{17}\right)$;

8) $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, если $\sin \beta = -\frac{40}{41}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$;

9) $\cos x$, если $\cos 2x = \frac{11}{61}$ при $0^\circ < 2x < 90^\circ$.

2. Упростите:

1) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$;

2) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;

3) $\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$;

4) $\frac{1 - \cos 20^\circ}{1 + \sin 70^\circ}$.

3. Докажите тождества:

1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$;

2) $\frac{1 - \sin 25^\circ 30'}{1 + \sin 25^\circ 30'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15'$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin x = \sin 2x$;

2) $2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 1$;

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0,5$;

4) $2 \cos^2(x - \pi) + 3 \sin(\pi + x) = 0$;

5) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$;

6) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x$.

Решение практикума 8

1. Вычислите:

1) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot (-0,6)^2 = 1 - 0,72 = \boxed{0,28}.$$

2) $\sin(2\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin \beta = \frac{1}{2}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$,

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

$$\sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos 2\alpha;$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\cos \beta < 0);$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\sin \alpha < 0);$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9};$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9};$$

$$\sin(2\alpha + \beta) = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \boxed{\frac{4\sqrt{15} - 1}{18}}.$$

3) $\operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right).$

Так как $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то

$$\operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{4}{5} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\arcsin \frac{4}{5} \right)}.$$

$$\arcsin \frac{4}{5} = \alpha; \quad \alpha \in \text{I четверти}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} \left(2 \arcsin \frac{4}{5}\right) = \boxed{-\frac{24}{7}}.$$

4) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$\cos \alpha < 0$; $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, так как $\frac{\alpha}{2} \in \text{I четверти}$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{8}{17};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \boxed{\frac{3\sqrt{34}}{34}}.$$

5) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{161}{289}$ при $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \boxed{\frac{15}{17}}.$$

6) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \alpha \in \text{III четверти, поэтому}$$

$$\cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = \frac{\frac{4}{3}}{-\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}};$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \text{II}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}}} = \boxed{-3}.$$

$$7) \cos \left(\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{17} \right).$$

$$\cos \left(\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{17} \right) = -\cos \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{17};$$

так как $\arcsin \frac{8}{17} = \alpha \in \text{I четверти}$ и $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, то

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17} \right)^2} = \frac{15}{17}.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \frac{\alpha}{2} \in \text{I четверти};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Таким образом, } \cos \left(\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{17} \right) = \boxed{-\frac{4\sqrt{17}}{17}}.$$

$$8) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \text{ если } \sin \beta = -\frac{40}{41} \text{ при } 540^\circ < \beta < 630^\circ.$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{40}{41} \right)^2} = -\frac{9}{41}; \quad \beta \in \text{III};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}; \quad \frac{\beta}{2} \in \text{IV}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} < 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{9}{41}}{1 - \frac{9}{41}}} = -\sqrt{\frac{50}{32}} = \boxed{-\frac{5}{4}}.$$

$$9) \cos x, \text{ если } \cos 2x = \frac{11}{61} \text{ при } 0^\circ < 2x < 90^\circ.$$

$x \in \text{I четверти}$, значит

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \frac{11}{61}}{2}} = \sqrt{\frac{72}{2 \cdot 61}} = \boxed{\frac{6\sqrt{61}}{61}}.$$

2. Упростите:

$$1) \cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha =$$

$$= (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) =$$

$$= 1 \cdot \cos 4\alpha = \boxed{\cos 4\alpha}.$$

$$2) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \boxed{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

$$3) \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1.$$

$$4) \frac{1 - \cos 20^\circ}{1 + \sin 70^\circ} =$$

$$= \frac{1 - \cos 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin^2 10^\circ}{2 \cos^2 10^\circ} = \boxed{\operatorname{tg}^2 10^\circ},$$

$$\text{так как } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ и } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

3. Докажите тождества:

$$1) \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4.$$

$$L = \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 4.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 4 \\ \Pi = 4 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1 - \sin 25^\circ 30'}{1 + \sin 25^\circ 30'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15'.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 - \sin 25^\circ 30'}{1 + \sin 25^\circ 30'} = \frac{1 - \cos 64^\circ 30'}{1 + \cos 64^\circ 30'} = \\ &= \frac{2 \sin^2 32^\circ 15'}{2 \cos^2 32^\circ 15'} = \operatorname{tg}^2 32^\circ 15'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^2 32^\circ 15' \\ \Pi &= \operatorname{tg}^2 32^\circ 15' \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \sin x = \sin 2x.$$

$$\sin x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0; \quad \sin x(1 - 2 \cos x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 - 2 \cos x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 1.$$

$$2(1 - \cos^2 x - \cos^2 x) = 1; \quad -2 \cos 2x = 1; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin^4 x - \cos^4 x = 0,5.$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,5;$$

$$-\cos 2x = 0,5; \quad \cos 2x = -0,5; \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2} k; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) 2 \cos^2(x - \pi) + 3 \sin(\pi + x) = 0.$$

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0; \quad 2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x = 0;$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0;$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$$\begin{cases} \sin x = -2 & \notin [-1; 1] \\ \sin x = \frac{1}{2}; & x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) 3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1.$$

$$3 \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1; \quad \cos x \neq 0 \text{ при } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$3 \sin^2 x - 1 = \cos^2 x; \quad 3 \sin^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x;$$

$$4 \sin^2 x - 2 = 0; \quad -2(1 - 2 \sin^2 x) = 0; \quad -2 \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x = 0; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x.$$

$$-\cos 2x = \cos^2 2x; \quad \cos 2x(\cos 2x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \pi + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; \frac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 7

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos \alpha = -0,8$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sin \left(2 \arccos \frac{3}{5} \right)$;

3) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 0,28 \right)$;

4) $\sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right)$;

5) $\sin \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \right)$;

6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) \right)$;

7) $\operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} \right)$.

2. Упростите:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;

2) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$;

3) $2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{3}{2} \alpha \right) - 1$;

4) $\frac{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}$.

3. Докажите:

$$1) \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4};$$

$$2) \frac{1 - \cos 25^\circ 30'}{1 + \cos 25^\circ 30'} = \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2};$$

$$2) \operatorname{tg} 2x = 3 \sin x;$$

$$3) \cos^2 \frac{3}{2}x = \sin^2 \frac{3}{2}x + 2 \cos 4x \cdot \cos 3x;$$

$$4) 2 \cos^2(2\pi - x) = 3 \sin(\pi - x) + 2;$$

$$5) 1 - \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right);$$

$$6) 4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x.$$

Решение тренировочной работы 7**1. Вычислите:**

$$1) \sin 2\alpha, \text{ если } \cos \alpha = -0,8 \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha > 0; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,8)^2} = 0,6;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = \boxed{-0,96}.$$

$$2) \sin \left(2 \arccos \frac{3}{5} \right) = 2 \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) \cdot \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{а) } \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5}; \\ \text{б) } \arccos \frac{3}{5} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ значит } \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) > 0. \end{array} \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \left[\cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) \right]^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

$$3) \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 0,28 \right).$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,28; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,28; \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,28)^2}} = \frac{25}{\sqrt{674}};$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 0,28 \right) = \cos (2 \operatorname{arctg} 0,28) =$$

$$= 2 \cdot \frac{625}{674} - 1 = \boxed{\frac{288}{337}}.$$

$$4) \sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right) = -\sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right);$$

$$\arccos \frac{4}{5} = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ тогда } \frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ поэтому}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ значит}$$

$$\sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} \right) = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{10}}.$$

$$5) \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \right).$$

$$\text{Так как } \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \text{ и } \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\text{то } \cos \alpha = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12} \right)^2}} = \frac{5}{13}.$$

$$\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \sin \frac{\alpha}{2} > 0; \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{13}}{13}}.$$

$$6) \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) \right) =$$

$$= -\cos \left(\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) \right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}, \text{ так как}$$

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{3}{4} \right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right), \text{ тогда } \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} > 0; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\arccos \left(-\frac{3}{4} \right) \right) &= \cos \left(\pi - \arccos \frac{3}{4} \right) = \\ &= -\cos \left(\arccos \frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$7) \quad \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} \right) = -\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} \right);$$

$$\arccos \frac{5}{13} = \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}};$$

$$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ тогда } \frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right); \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{1 + \frac{5}{13}}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \frac{2}{3}; \quad \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} \right) = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

2. Упростите:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} &= \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin(\alpha - 2\alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = -\frac{1}{\cos \alpha} = \boxed{-\sec \alpha} \text{ при } \alpha \neq \pi k \mid k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 3\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$$3) \quad 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{3}{2} \alpha \right) - 1 = -\cos(90^\circ + 3\alpha) = \boxed{\sin 3\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x} &= \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - 1)}{2 \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} + 1)} = \\
 &= -\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = -\frac{2 \sin^2 \frac{x}{4}}{2 \cos^2 \frac{x}{4}} = \boxed{-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}}.
 \end{aligned}$$

3. Докажите:

$$1) \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \cdot \sin(90^\circ - 15^\circ) = \\
 &= \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{4} \\
 \Pi &= \frac{1}{4} \quad \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{1 - \cos 25^\circ 30'}{1 + \cos 25^\circ 30'} = \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1 - \cos 25^\circ 30'}{1 + \cos 25^\circ 30'} = \frac{2 \sin^2 12^\circ 45'}{2 \cos^2 12^\circ 45'} = \\
 &= \operatorname{tg}^2 12^\circ 45' = \operatorname{tg}^2(90^\circ - 77^\circ 15') = \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15'.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15' \\
 \Pi &= \operatorname{ctg}^2 77^\circ 15' \quad \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.
 \end{aligned}$$

4. Решите уравнения:

$$1) \sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

$$\sin 2x = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right);$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = \cos x \cdot 1; \quad 2 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{6} \right) + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^n \left(\frac{\pi}{6} \right) + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \operatorname{tg} 2x = 3 \sin x.$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 3 \sin x \quad (\cos 2x \neq 0);$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = 3 \sin x \cdot \cos 2x; \quad \sin x(2 \cos x - 3 \cos 2x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 & x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = 0 \end{cases}; \quad 6 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0;$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+18}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6};$$

$$x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что корни уравнения удовлетворяют условию $\cos 2x \neq 0$.

$$\text{Ответ: } \left\{ x = \pi k; \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \cos^2 \frac{3}{2}x = \sin^2 \frac{3}{2}x + 2 \cos 4x \cdot \cos 3x.$$

$$\cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 \frac{3}{2}x - 2 \cos 4x \cdot \cos 3x = 0;$$

$$\cos 3x - 2 \cos 4x \cdot \cos 3x = 0; \quad \cos 3x(1 - 2 \cos 4x) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \cos 4x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k; \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) 2 \cos^2(2\pi - x) = 3 \sin(\pi - x) + 2.$$

$$2 \cos^2 x - 3 \sin x - 2 = 0; \quad 2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - 2 = 0;$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0; \quad 2 \sin x(\sin x + 1,5) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1,5 \notin [-1; 1] \end{cases}; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$5) 1 - \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{Так как } \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{x}{2},$$

$$\text{то } 1 - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

$$1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right);$$

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right);$$

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.$$

$$a) \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}; \quad \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) 4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x.$$

$$4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) - 2 \sin^2 x = 0;$$

$$2 \sin^2 x (2 + 2 \cos 2x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \pi k \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \begin{cases} x = \pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 8

1. Вычислите:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)$, если $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

5) $\cos(\arcsin \frac{5}{13} - \alpha)$, если $\cos \alpha = 0,8$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

6) $\sin\left(\alpha - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right)$, если $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

7) $\sin\left(\arcsin \frac{40}{41} + \arcsin \frac{9}{41}\right)$.

2. Докажите тождества:

1) $\cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$;

4) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{(\cos \alpha - \sec \alpha) \cdot \sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$;

5) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha} - 1 + \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

Решение тренировочной работы 8

1. Вычислите:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right), \text{ если } \cos \alpha = -\frac{8}{17} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\alpha \in \text{III}, \text{ значит } \sin \alpha < 0; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = -\frac{15}{17};$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) = \boxed{-\frac{8\sqrt{3} + 15}{34}}.$$

$$2) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right), \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \text{ значит } \cos \alpha < 0; \quad \sin \alpha > 0;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{49}{576}}} = \frac{24}{25};$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = -\frac{7}{25};$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha), \text{ то} \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{24}{25} - \frac{7}{25}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{25} = \boxed{\frac{17\sqrt{2}}{50}}.$$

$$3) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right), \text{ если } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Из условия следует, что $\sin \alpha > 0$;

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} : \frac{7}{4} = \frac{1}{7}, \text{ значит } \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \boxed{7}.$$

$$4) \operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ), \text{ если } \sin \alpha = \frac{7}{25} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$\alpha \in I$, значит $\cos \alpha > 0$;

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7}{24};$$

$$\text{так как } \operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\text{то } \operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ) = \frac{\frac{7}{24} - 1}{1 + \frac{7}{24}} = -\frac{17}{24} : \frac{31}{24} = \boxed{-\frac{17}{31}}.$$

$$5) \cos(\arcsin \frac{5}{13} - \alpha), \text{ если } \cos \alpha = 0,8 \text{ при } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Из условия следует, что $\sin \alpha < 0$;

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6;$$

$$\arcsin \frac{5}{13} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ значит } \cos \left(\arcsin \frac{5}{13}\right) > 0, \text{ тогда}$$

$$\cos \left(\arcsin \frac{5}{13}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

$$\begin{aligned}&\text{Так как } \cos\left(\arcsin \frac{5}{13} - \alpha\right) = \\&= \cos\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) \cdot \cos \alpha + \sin\left(\arcsin \frac{5}{13}\right) \cdot \sin \alpha, \\&\text{то } \cos\left(\arcsin \frac{5}{13} - \alpha\right) = \frac{12}{13} \cdot 0,8 - 0,6 \cdot \frac{5}{13} = \\&= \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \boxed{\frac{33}{65}}.\end{aligned}$$

$$6) \sin\left(\alpha - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right), \text{ если } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$\text{Так как } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}, \text{ то } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \text{ значит } \cos \alpha < 0;$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{arccctg} \frac{4}{3} = \beta; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{3}; \quad \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \quad \sin \beta > 0.$$

$$\text{Тогда } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}}, \text{ значит } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos \beta > 0; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Учтем, что } \sin\left(\alpha - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos\left(\operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right) - \sin\left(\operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right) \cdot \cos \alpha, \text{ тогда}$$

$$\sin\left(\alpha - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

$$\begin{aligned}
 7) \sin \left(\arcsin \frac{40}{41} + \arcsin \frac{9}{41} \right) = & \\
 \left[\begin{array}{l} \text{а) Обозначим } \alpha = \arcsin \frac{40}{41} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right); \\ \sin \alpha = \frac{40}{41}; \quad \cos \alpha > 0; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{40}{41} \right)^2} = \frac{9}{41}. \\ \text{б) Обозначим } \beta = \arcsin \frac{9}{41} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right); \\ \sin \beta = \frac{9}{41}; \quad \cos \beta > 0; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{41} \right)^2} = \frac{40}{41}. \end{array} \right] & \\
 = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = & \\
 = \frac{40}{41} \cdot \frac{40}{41} + \frac{9}{41} \cdot \frac{9}{41} = \frac{1600}{1681} + \frac{81}{1681} = \boxed{1}. &
 \end{aligned}$$

2. Докажите тождества:

$$\begin{aligned}
 1) \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2}. \\
 \text{а) } \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha &= \\
 = (\cos 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ) \cdot \cos \alpha &= \\
 = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \cdot \cos \alpha &= \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \\
 \text{б) } \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha &= \\
 = (\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha &= \\
 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \cdot \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha. \\
 L = \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha &= \\
 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha &= \\
 = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} L = \frac{1}{2} \\ \Pi = \frac{1}{2} \end{array} \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

Примечание. Можно проще, если сразу увидеть, что

$$\begin{aligned} & \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ & = \cos(60^\circ + \alpha - \alpha) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$2) \sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Докажем по аналогии с предыдущим примером:

$$\begin{aligned} L &= \sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin(45^\circ - \alpha + \alpha) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1)}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\Pi = \operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{\sin 2\alpha} \\ \Pi = \frac{1}{\sin 2\alpha} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \frac{\sin^2 \alpha - 1}{(\cos \alpha - \sec \alpha) \cdot \sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$\Pi = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin^2 \alpha - 1}{(\cos \alpha - \sec \alpha) \cdot \sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha = \\ &= \frac{-\cos^2 \alpha}{\left(\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \cdot \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{-\cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\cos^2 \alpha}{\frac{-\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{-\cos^3 \alpha}{-\sin^3 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\sin^3 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \left. \begin{array}{l} L = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \\ \Pi = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha} - 1 + \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha} - 1 + \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) : \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} - 1 + \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{1} - 1 + \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1 + \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= 1 - 1 + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \left. \begin{array}{l} L = \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha \\ \Pi = \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Тренировочная работа 9

Упростите:

- 1) $\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cdot \sin \beta$;
- 2) $\cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)$;
- 3) $\sin(\alpha + 120^\circ) - \sin(60^\circ - \alpha)$;
- 4) $\frac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 65^\circ \cdot \sin(-40^\circ)}{\sin 17^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 17^\circ \cdot \sin 8^\circ}$;
- 5) $\frac{\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}$;
- 6) $\frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2}$;
- 7) $\frac{\cos 75^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}$;
- 8) $\sin 740^\circ - \cos 77^\circ \cdot \cos 213^\circ - \cos 13^\circ \cdot \sin 33^\circ$;
- 9) $\frac{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{tg} 171^\circ \cdot \operatorname{tg} 21^\circ}{\operatorname{tg}(-171^\circ) + \operatorname{tg} 201^\circ}$;
- 10) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(30^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha}$;
- 11) $\frac{\cos \alpha - 2 \cos(60^\circ - \alpha)}{2 \sin(\alpha - 30^\circ) - \sqrt{3} \sin \alpha}$;
- 12) $\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}(45^\circ + \beta) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 3\beta)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \beta) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\beta)}$.

Решение тренировочной работы 9

Упростите:

$$1) \cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \boxed{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

$$2) \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos(\alpha - \beta) = \\ = \cos \alpha \cdot \cos \beta - (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \boxed{-\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$3) \sin(\alpha + 120^\circ) - \sin(60^\circ - \alpha) = \\ = \sin \alpha \cdot \cos 120^\circ + \sin 120^\circ \cdot \cos \alpha - \\ - (\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha) = \\ = -\cos 60^\circ \cdot \sin \alpha + \sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \\ - \sin 60^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha = \boxed{0}.$$

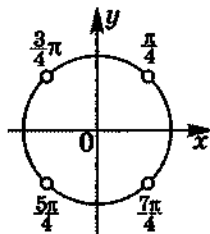
$$4) \frac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 65^\circ \cdot \sin(-40^\circ)}{\sin 17^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 17^\circ \cdot \sin 8^\circ} = \\ = \frac{\cos 65^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 65^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin(17^\circ + 8^\circ)} = \\ = \frac{\cos(65^\circ - 40^\circ)}{\sin(17^\circ + 8^\circ)} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \boxed{\operatorname{ctg} 25^\circ}.$$

$$5) \frac{\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = 0$$

$$\text{при } \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) \neq 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \alpha \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \neq \frac{5\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

При $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$

$$\frac{\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \boxed{0}.$$



$$\begin{aligned} 6) \quad \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2} &= \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha = \cos(60^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

$$\text{Или } \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha =$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha = \boxed{\sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)}.$$

$$7) \quad \frac{\cos 75^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(75^\circ + 25^\circ)}{\sin(20^\circ - 10^\circ)} = \frac{\cos 100^\circ}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(90^\circ + 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \boxed{-1}.$$

$$8) \quad \sin 740^\circ - \cos 77^\circ \cdot \cos 213^\circ - \cos 13^\circ \cdot \sin 33^\circ =$$

$$= \sin 20^\circ - \cos(90^\circ - 13^\circ) \cdot \cos(180^\circ + 33^\circ) - \cos 13^\circ \cdot \sin 33^\circ =$$

$$= \sin 20^\circ - \sin 13^\circ \cdot (-\cos 33^\circ) - \cos 13^\circ \cdot \sin 33^\circ =$$

$$= \sin 20^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 33^\circ - \cos 13^\circ \cdot \sin 33^\circ =$$

$$= \sin 20^\circ + \sin(13^\circ - 33^\circ) = \sin 20^\circ + \sin(-20^\circ) =$$

$$= \sin 20^\circ - \sin 20^\circ = \boxed{0}.$$

$$9) \quad \frac{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{tg} 171^\circ \cdot \operatorname{tg} 21^\circ}{\operatorname{tg}(-171^\circ) + \operatorname{tg} 201^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ - 9^\circ) \cdot \operatorname{tg} 21^\circ}{-\operatorname{tg}(180^\circ - 9^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ + 21^\circ)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}(-9^\circ) \cdot \operatorname{tg} 21^\circ}{-\operatorname{tg}(-9^\circ) + \operatorname{tg} 21^\circ} = \frac{1 - \operatorname{tg} 9^\circ \cdot \operatorname{tg} 21^\circ}{\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 21^\circ} =$$

$$= \operatorname{ctg}(9^\circ + 21^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \boxed{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(30^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2(\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 45^\circ \cdot \sin \alpha)}{2(\sin 30^\circ \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos 30^\circ) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)}{2\left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{-\sqrt{2} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \boxed{-\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{\cos \alpha - 2 \cos(60^\circ - \alpha)}{2 \sin(\alpha - 30^\circ) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\cos \alpha - 2(\cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha)}{2(\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\cos \alpha - 2\left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{-\sqrt{3} \sin \alpha}{-\cos \alpha} = \boxed{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$12) \quad \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}(45^\circ + \beta) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 3\beta)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \beta) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\beta)}.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \beta = a$; $\operatorname{tg} 3\beta = b$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1+b}{1-b} = \\
 & \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} = \\
 & = \frac{(1-a)(1-b) - (1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)} : \frac{(1+a)(1-b) + (1+b)(1-a)}{(1-a)(1-b)} = \\
 & = \frac{1-b-a+ab-1-b-a-ab}{(1-a)(1-b)} : \frac{1-b+a-ab+1-a+b-ab}{(1-a)(1-b)} = \\
 & = \frac{-2a-2b}{(1-a)(1-b)} \cdot \frac{(1-a)(1-b)}{2-2ab} = \frac{-2(a+b)}{2(1-ab)} = -\frac{a+b}{1-ab}; \\
 & \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}(45^\circ + \beta) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 3\beta)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \beta) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\beta)} = \frac{1 - \frac{1+\operatorname{tg} \beta}{1-\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1+\operatorname{tg} 3\beta}{1-\operatorname{tg} 3\beta}}{\frac{1+\operatorname{tg} \beta}{1-\operatorname{tg} \beta} + \frac{1+\operatorname{tg} 3\beta}{1-\operatorname{tg} 3\beta}} = \\
 & = -\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} 3\beta}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} 3\beta} = -\operatorname{tg}(\beta + 3\beta) = \boxed{-\operatorname{tg} 4\beta}.
 \end{aligned}$$

Тренировочная работа 10

Решите уравнения:

1) $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 1;$

2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

3) $\frac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1;$

4) $\cos x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right);$

5) $\sin 5x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \sin 2x - 1;$

6) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1;$

7) $\sin(m + x) - \sin(m - x) = 0;$

8) $3 \cos x = 8 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right);$

9) $2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - 1;$

10) $\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{12}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - 2 \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{12}} = 1;$

11) $5 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 7 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$

12) $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x - 3 = 0;$

13) $3 \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin x;$

14) $2 \sec^2 x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 1;$

15) $\sin 3x = 4 \sin x \cdot \cos 2x.$

Решение тренировочной работы 10

Решите уравнения:

1) $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = 1.$

$$\cos(2x + x) = 1; \quad \cos 3x = 1; \quad 3x = 2\pi k; \quad x = \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3) $\frac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1}{1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1.$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 1; \quad \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$2x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad 2x - \frac{\pi}{6} = \pi k;$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \cos x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right).$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) - \cos x = 0;$$

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right) - \cos x = 0;$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) - \cos x = 0;$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0;$$

$$\sqrt{3} \sin x = 0; \quad \sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$5) \sin 5x \cdot \cos 2x = \cos 5x \cdot \sin 2x - 1.$$

$$\sin 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x \cdot \sin 2x = -1;$$

$$\sin(5x - 2x) = -1; \quad \sin 3x = -1;$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 1.$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = 1;$$

$$2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1; \quad 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = 1;$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

$$7) \sin(m+x) - \sin(m-x) = 0.$$

$$(\sin m \cdot \cos x + \cos m \cdot \sin x) - (\sin m \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos m) = 0;$$

$$2 \sin x \cdot \cos m = 0;$$

$$\text{а) } \cos m = 0 \quad (\forall x) \text{ при } m = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \cos m \neq 0; \quad \sin x = 0;$$

$$m \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: при } m = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \quad x - \text{любое};$$

$$\text{при } m \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \quad x = \pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$8) \quad 3 \cos x = 8 \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right).$$

$$3 \cos x = 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right);$$

$$3 \cos x = 8 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right); \quad 3 \cos x = 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x;$$

$$\cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0; \quad 1 - 4\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12};$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \quad 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - 1.$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + 1 - \operatorname{tg} x = 0;$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} (1 - \operatorname{tg} x) + (1 - \operatorname{tg} x) = 0; \quad (1 - \operatorname{tg} x) \left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} + 1 \right) = 0;$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 2\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{12}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - 2\cos x \cdot \sin \frac{\pi}{12}} = 1.$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{12} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{12} + 2\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{12}}{\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{12} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{12} - 2\cos x \cdot \sin \frac{\pi}{12}} = 1;$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{12} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{12}}{\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{12} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{12}} = 1; \quad \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)} = 1;$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 1; \quad x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) 5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 7\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 12\cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 0;$$

$$\sin x - 12\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0; \quad \sin x - 6\sqrt{3}\cos x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x - 6\sqrt{3} = 0; \quad \operatorname{tg} x = 6\sqrt{3}; \quad x = \operatorname{arctg} 6\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{\operatorname{arctg} 6\sqrt{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$12) 4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0.$$

$$4\sin^2 x \cdot (\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0;$$

$$(\sin x + 1)(4\sin^2 x - 3) = 0;$$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^t \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi t \mid t \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

13) $3 \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \sin x.$

$$3 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x \right) = \sin x;$$

$$3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \sin x; \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{5}{2} \sin x = 0;$$

$$3\sqrt{3} \cos x - 5 \sin x = 0; \quad 3\sqrt{3} - 5 \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{5}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{5} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{5} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

14) $2 \sec^2 x - 3 \operatorname{tg}^2 x = 1.$

$$\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1; \quad \frac{2 - 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1;$$

$$2 - 3 \sin^2 x = \cos^2 x; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z};$$

$$2 - 3 \sin^2 x = 1 - \sin^2 x;$$

$$1 - 2 \sin^2 x = 0; \quad (1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$15) \sin 3x = 4 \sin x \cdot \cos 2x.$$

$$\sin(2x + x) = 4 \sin x \cdot \cos 2x;$$

$$\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 4 \sin x \cdot \cos 2x;$$

$$\sin 2x \cdot \cos x - 3 \cos 2x \cdot \sin x = 0;$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x = 0;$$

$$\sin x \cdot (2 \cos^2 x - 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x) = 0;$$

$$\sin x \cdot (3 \sin^2 x - \cos^2 x) = 0; \quad \sin x \cdot (3 \sin^2 x - (1 - \sin^2 x)) = 0;$$

$$\sin x(3 \sin^2 x + \sin^2 x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 4 \sin^2 x - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0; \\ 2 \sin x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 11

Вычислите:

- 1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
- 2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,3$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- 3) $\cos(2\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ при $\beta \in \text{II четверти}$;
- 4) $\cos \left(2 \operatorname{arctg} \frac{7}{24} \right)$;
- 5) $\operatorname{ctg} \left(2 \arcsin \frac{7}{25} \right)$;
- 6) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \arcsin 0,96 \right)$;
- 7) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{119}{120}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
- 8) $\operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} \right)$;
- 9) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{224}}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- 10) $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right)$;
- 11) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -0,8$ при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
- 12) $\cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{12}{5} \right) \right]$;
- 13) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$ при $630^\circ < \alpha < 720^\circ$;

$$14) \sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} \right);$$

$$15) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \text{ если } \cos \beta = -\frac{13}{85} \text{ при } 540^\circ < \beta < 630^\circ;$$

$$16) \cos \left[2\pi - \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) \right];$$

$$17) \cos 5x, \text{ если } \cos 10x = \frac{15}{113} \text{ при } 1080^\circ < 10x < 1200^\circ;$$

$$18) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} \right).$$

Решение тренировочной работы 11

Вычислите:

$$1) \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если } \cos \alpha = \frac{2}{3} \text{ при } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \quad \cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9};$$

 $\sin \alpha < 0$, так как $\alpha \in \text{IV}$ четверти;

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\sqrt{5};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-\frac{4}{9}\sqrt{5}}{-\frac{1}{9}}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \boxed{4\sqrt{5}}.$$

$$2) \operatorname{ctg} 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = -0,3 \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot (-0,3)^2 = 0,82;$$

$$\cos \alpha < 0, \text{ так как } \alpha \in \text{III}; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - (-0,3)^2} = -\frac{\sqrt{91}}{10};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{91}}{10}\right) \cdot (-0,3) = \frac{3}{50}\sqrt{91};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{0,82}{\frac{3}{50}\sqrt{91}} = \boxed{\frac{41\sqrt{91}}{273}}.$$

$$3) \cos(2\alpha - \beta), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}; \sin \beta = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ при } \beta \in \text{II} \text{ четверти.}$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin 2\alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{9}{25}}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17};$$

$$\cos \beta < 0, \text{ так как } \beta \in \text{II}; \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta};$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2} = -\frac{5}{7};$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = -\frac{8}{17} \cdot \frac{5}{7} + \frac{15}{17} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \boxed{-\frac{40 - 30\sqrt{6}}{119}}.$$

$$4) \cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right).$$

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{24} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \frac{7}{24} = \alpha, \text{ тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24};$$

$$\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right) = 2 \cos^2 \operatorname{arctg} \frac{7}{24} - 1;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \text{ но } \cos \alpha > 0, \quad \alpha \in \text{I четверти.}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2}} = \frac{24}{25};$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 576 - 625}{25^2} = \frac{527}{625},$$

$$\text{т. е. } \cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{7}{24}\right) = \boxed{\frac{527}{625}}.$$

$$5) \operatorname{ctg}\left(2 \arcsin \frac{7}{25}\right).$$

$$\text{Пусть } \arcsin \frac{7}{25} = \alpha; \quad \alpha \in \text{I четверти, } \sin \alpha = \frac{7}{25}.$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = ?$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{49}{625} = \frac{527}{625};$$

$$\cos \alpha > 0, \text{ так как } \alpha \in I; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{336}{625};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\frac{527}{625}}{\frac{336}{625}} = \frac{527}{336}.$$

$$\text{Таким образом, } \operatorname{ctg} 2\alpha = \boxed{\frac{527}{336}}.$$

$$6) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \arcsin 0,96 \right).$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \arcsin 0,96 \right) = \sin (2 \arcsin 0,96).$$

Пусть $\arcsin 0,96 = \alpha$; $\sin \alpha = 0,96$; $\alpha \in I$ четверти;

$$\cos \alpha > 0; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - (0,96)^2} = \frac{7}{25};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{7}{25} = \frac{336}{625}.$$

$$\text{Таким образом, } \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \arcsin 0,96 \right) = \boxed{\frac{336}{625}}.$$

$$7) \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{119}{120} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha < 0; \quad \alpha \in III;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + \left(\frac{119}{120}\right)^2}} = -\frac{120}{169};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{120}{169}}{2}} = \sqrt{\frac{289}{169} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{17}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{17\sqrt{2}}{26}}.$$

$$8) \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} \right).$$

$$\text{Пусть } \arcsin \frac{3}{5} = \alpha; \quad \alpha \in I; \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Требуется найти } \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Таким образом, } \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} \right) = \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

$$9) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{224}} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha > 0; \quad \alpha \in I \text{ четверти};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{224}}} = \frac{\sqrt{224}}{\sqrt{225}} = \frac{4\sqrt{14}}{15};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha > 0; \quad \alpha \in I \text{ четверти};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{224}{225}} = \frac{1}{15};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{4\sqrt{14}}{15}}{\frac{1}{15}} = \boxed{15 - 4\sqrt{14}}.$$

$$10) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right).$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \alpha; \quad \alpha \in I; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{\alpha}{2} \in I \text{ четверти};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha > 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Таким образом, } \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right) = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$$11) \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \sin \alpha = -0,8 \text{ при } 180^\circ < \alpha < 270^\circ.$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - (-0,8)^2} = -\sqrt{0,36} = -0,6;$$

$$90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ; \quad \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,6}{2}} = \sqrt{0,8} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

$$12) \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{12}{5} \right) \right].$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \left(-\frac{12}{5} \right) = \alpha; \quad \alpha \in IV; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha > 0;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2}} = \frac{5}{13};$$

$$\frac{\alpha}{2} \in IV; \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 0; \quad \cos \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Таким образом, } \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{12}{5} \right) \right] = \boxed{\frac{3\sqrt{13}}{13}}.$$

$$13) \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{15}{17} \text{ при } 630^\circ < \alpha < 720^\circ.$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \text{ так как } \alpha \in IV, \text{ то } \cos \alpha > 0;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{15}{17} \right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \text{ так как } \frac{\alpha}{2} \in IV;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{8}{17}}{2}} = \boxed{\frac{5\sqrt{34}}{34}}.$$

$$14) \sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} \right).$$

$$\sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} \right) = \sin \left(-\arccos \frac{12}{13} \right).$$

$$\text{Пусть } \arccos \frac{12}{13} = \alpha; \quad \alpha \in I; \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

$$\sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) = -\sin \frac{\alpha}{2}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \frac{\alpha}{2} \in I;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{26};$$

$$\sin \left(2\pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} \right) = \boxed{-\frac{\sqrt{26}}{26}}.$$

15) $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, если $\cos \beta = -\frac{13}{85}$ при $540^\circ < \beta < 630^\circ$.

$$\frac{\beta}{2} \in \text{IV}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} < 0; \quad \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{13}{85}}{1 + \frac{13}{85}}} = -\sqrt{\frac{72}{98}} = \boxed{-\frac{6}{7}}.$$

16) $\cos \left[2\pi - \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) \right]$.

$$\text{Пусть } \arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) = \alpha; \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0; \quad \sin \alpha = -\frac{5}{13}.$$

$$\cos \left(2\pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\cos \alpha > 0, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13} \right)^2} = \frac{12}{13};$$

$$\text{так как } -\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 0, \text{ то } \cos \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

$$\text{Таким образом, } \cos \left[2\pi - \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{5}{13} \right) \right] = \boxed{\frac{5\sqrt{26}}{26}}.$$

17) $\cos 5x$, если $\cos 10x = \frac{15}{113}$ при $1080^\circ < 10x < 1200^\circ$.

$$540^\circ < 5x < 600^\circ; \quad 5x \in \text{III}; \quad \cos 5x < 0;$$

$$\cos 5x = -\sqrt{\frac{1 + \cos 10x}{2}};$$

$$\cos 5x = -\sqrt{\frac{1 + \frac{15}{113}}{2}} = -\sqrt{\frac{64}{113}} = \boxed{-\frac{8\sqrt{113}}{113}}.$$

$$18) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} \right).$$

$$\text{Пусть } \arcsin \frac{12}{13} = \alpha; \quad \alpha \in I; \quad \sin \alpha = \frac{12}{13}.$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = -\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right);$$

$$\cos \alpha > 0, \text{ так как } \alpha \in I; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2} = \frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Так как $\frac{\alpha}{2} \in I$ четверти, то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{1 + \frac{5}{13}}} = \frac{2}{3};$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{12}{13} \right) = \boxed{-\frac{2}{3}}.$$

Тренировочная работа 12

Упростите:

1) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right);$

2) $1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha;$

3) $\cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2};$

4) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha};$

5) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha};$

6) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha;$

7) $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} \right) - 1;$

8) $\frac{1 + \cos 42^\circ}{1 - \sin 48^\circ};$

9) $\frac{1 - 2 \sin \frac{x}{2} - \cos x}{1 + 2 \sin \frac{x}{2} - \cos x};$

10) $\frac{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}.$

Решение тренировочной работы 12

Упростите:

$$\begin{aligned} 1) \sin^2 \alpha - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \boxed{-\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) 1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \\ &= 1 - 2 \cdot (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = \boxed{\cos 4\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \\ &= \cos^2 \alpha - \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \boxed{\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} &= \\ &= \frac{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \boxed{\frac{2 \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{1 - \sin 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} &= \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \\ &= \boxed{\sin \alpha - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha &= \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \boxed{\operatorname{cosec} 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} \right) - 1 &= \\ &= \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha \right) = \boxed{\sin 3\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{1 + \cos 42^\circ}{1 - \sin 48^\circ} = \\
 & = \frac{1 + \cos 42^\circ}{1 - \sin(90^\circ - 42^\circ)} = \frac{1 + \cos 42^\circ}{1 - \cos 42^\circ} = \frac{2 \cos^2 21^\circ}{2 \sin^2 21^\circ} = \boxed{\operatorname{ctg}^2 21^\circ}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \frac{1 - 2 \sin \frac{x}{2} - \cos x}{1 + 2 \sin \frac{x}{2} - \cos x} = \\
 & = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} - 1)}{2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + 1)} = \frac{\sin \frac{x}{2} - 1}{\sin \frac{x}{2} + 1} = \\
 & = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - 1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + 1} = \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4} \right)}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4} \right)} = \boxed{-\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4} \right)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x}{1 - 2 \cos \frac{x}{2} + \cos x} = \\
 & = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} + 1)}{2 \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - 1)} = \\
 & = -\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{1 - \cos \frac{x}{2}} = -\frac{2 \cos^2 \frac{x}{4}}{2 \sin^2 \frac{x}{4}} = \boxed{-\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4}}.
 \end{aligned}$$

Тренировочная работа 13

Докажите тождества:

1) $\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$

2) $\frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos 4\alpha}{\cos \alpha (1 + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)} = 2 \sin \alpha;$

3) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \beta;$

4) $\cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) = \sin \alpha;$

5) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \alpha};$

6) $\frac{1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = 1;$

7) $\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{\sin \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2};$

8) $\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \right) = \sin \frac{\alpha}{2};$

9) $\frac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{cosec} 3\alpha} = \cos 5\alpha;$

10) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}} = -\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2};$

11) $\frac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\operatorname{cosec} 6\alpha} = \cos 10\alpha;$

12) $\frac{\cos^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

13) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$

$$14) \frac{1 + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} 1,5\alpha;$$

$$15) \frac{4 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}}{2 \cos \frac{2\alpha}{3}} = \sin \frac{2\alpha}{3};$$

$$16) \frac{4 \sin^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + \sin^2 (\sqrt{2} \alpha)}{1 - \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right)} = 4.$$

Решение тренировочной работы 13

Докажите тождества:

$$1) \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\ \Pi &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos 4\alpha}{\cos \alpha (1 + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)} = 2 \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos 4\alpha}{\cos \alpha (1 + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha (1 + 2 \sin 2\alpha)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha (2 \sin 2\alpha + 1)}{\cos \alpha (1 + 2 \sin 2\alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= 2 \sin \alpha \\ \Pi &= 2 \sin \alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$3) \frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = 2 \cos \beta.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\frac{1}{2} \sin \alpha} = 2 \cos \beta. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= 2 \cos \beta \\ \Pi &= 2 \cos \beta \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$4) \cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) = \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) = \\ &= -\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{-\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \sin \alpha \\ \Pi = \sin \alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$5) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot 2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \Pi = \frac{1}{\cos \alpha} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$6) \frac{1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = 1.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 - 8 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{1 - 2 \cdot (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{\cos 4\alpha} = \\ &= \frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = 1. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$7) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{\sin \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$L = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha}{4}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}}}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4}}{\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$L = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \Rightarrow L = \Pi. \end{array} \right.$$

$$\Pi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$8) \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \right) = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$L = \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \right) =$$

$$= \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$L = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \Rightarrow L = \Pi. \end{array} \right.$$

$$\Pi = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$9) \frac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{cosec} 3\alpha} = \cos 5\alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos 2\alpha}{\sec 3\alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{cosec} 3\alpha} = \\ &= \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = \cos 5\alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \cos 5\alpha \\ \Pi &= \cos 5\alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$10) \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}} = -\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha \right)}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \\ \Pi &= -\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$11) \frac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\operatorname{cosec} 6\alpha} = \cos 10\alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos 6\alpha}{\sec 4\alpha} - \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\operatorname{cosec} 6\alpha} = \frac{\cos 6\alpha}{\frac{1}{\cos 4\alpha}} - \frac{\sin 4\alpha}{\frac{1}{\sin 6\alpha}} = \\ &= \cos 6\alpha \cdot \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cdot \sin 6\alpha = \cos 10\alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \cos 10\alpha \\ \Pi &= \cos 10\alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$12) \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \frac{1-2\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg} 2\alpha \\ \Pi &= \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$13) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\frac{\cos \alpha(1-2\sin^2 \alpha)}{\sin \alpha}}{\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$14) \frac{1 + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} 1,5\alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin 3\alpha - \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos^2 1,5\alpha + 2 \sin 1,5\alpha \cdot \cos 1,5\alpha}{2 \sin^2 1,5\alpha + 2 \sin 1,5\alpha \cdot \cos 1,5\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos 1,5\alpha (\cos 1,5\alpha + \sin 1,5\alpha)}{2 \sin 1,5\alpha (\sin 1,5\alpha + \cos 1,5\alpha)} = \operatorname{ctg} 1,5\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} 1,5\alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg} 1,5\alpha \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$15) \frac{4 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}}{2 \cos \frac{2\alpha}{3}} = \sin \frac{2\alpha}{3}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{4 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}}{2 \cos \frac{2\alpha}{3}} = \\ &= \frac{4 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3} \right)}{2 \cos \frac{2\alpha}{3}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\alpha}{3} \cdot \cos \frac{2\alpha}{3}}{\cos \frac{2\alpha}{3}} = \sin \frac{2\alpha}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \frac{2\alpha}{3} \\ \Pi &= \sin \frac{2\alpha}{3} \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

$$16) \frac{4 \sin^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + \sin^2 (\sqrt{2} \alpha)}{1 - \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right)} = 4.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{4 \sin^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + \sin^2 (\sqrt{2} \alpha)}{1 - \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right)} = \\ &= \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) \left(\sin^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) \right)}{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right)} = \\ &= 4 \left(\sin^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \right) \right) = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 4 \\ \Pi &= 4 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

Тренировочная работа 14**1. Вычислите:**

1) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\beta$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = 0,6$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
и $\cos \beta = 0,28$ при $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

2) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha + 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos 2\beta$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
и $\operatorname{tg} \beta = -\frac{20}{21}$ при $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2. Решите уравнения:

1) $\sin 3x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 3x = -1$;

2) $\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \sin \frac{x}{2} = 1$;

3) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = 1$;

4) $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \operatorname{tg} (\pi - x) - 2\sqrt{3} = 0$;

5) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin^2 (2\pi - x) = 2$;

6) $\sin \frac{5\pi}{2} - \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{4} \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$.

Решение тренировочной работы 14**1. Вычислите:**

- 1) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\beta$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = 0,6$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
и $\cos \beta = 0,28$ при $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

$$\text{а) } \cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - (0,6)^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4};$$

$$\text{б) } \sin \beta < 0; \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - (0,28)^2} = -0,96;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-0,96}{0,28} = -3\frac{3}{7};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{-\frac{3}{4} - \left(-3\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{7}\right)} = \frac{-21 + 96}{28 + 72} = \boxed{0,75};$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \left(-3\frac{3}{7}\right)}{1 - \left(-3\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{-48 \cdot 7}{49 - (24)^2} =$$

$$= \frac{48 \cdot 7}{(24 + 7)(24 - 7)} = \frac{336}{31 \cdot 17} = \boxed{\frac{336}{527}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + 0,8}{0,6} = \frac{1,8}{0,6} = \boxed{3}.$$

- 2) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Так как } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{то } \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Значит, } \sin 2\alpha = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Тогда } \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = \\
 &= (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} = \boxed{-\frac{9\sqrt{3}}{16}}.
 \end{aligned}$$

$$3) \operatorname{tg} 2\alpha + 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-24}{7} = -3\frac{3}{7};$$

$$6) \sin \alpha > 0; \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$\sin \alpha = \frac{-\frac{3}{4}}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = 3;$$

$$b) \operatorname{tg} 2\alpha + 5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3\frac{3}{7} + 5 \cdot 3 = \boxed{11\frac{4}{7}}.$$

$$4) \cos(\alpha - \beta), \cos 2\beta \text{ и } \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \beta = -\frac{20}{21} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

$$a) \sin \alpha < 0; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}};$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2}} = -\frac{8}{17};$$

$$\cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17};$$

$$6) \sin \beta > 0; \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}};$$

$$\sin \beta = \frac{-\frac{20}{21}}{-\sqrt{1 + \left(-\frac{20}{21}\right)^2}} = \frac{20}{29};$$

$$\cos \beta < 0; \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = -\frac{21}{29};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= -\frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \frac{20}{29} = \frac{315 - 160}{17 \cdot 29} = \\ &= \frac{155}{17 \cdot 29} = \boxed{\frac{155}{493}}; \end{aligned}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta;$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{841 - 800}{841} = \boxed{\frac{41}{841}};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} > 0; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \boxed{\frac{4\sqrt{17}}{17}}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \sin 3x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 3x = -1.$$

$$\sin(3x + 5x) = -1; \quad \sin 8x = -1;$$

$$8x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \sin \frac{x}{2} = 1.$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) + \sin \frac{x}{2} = 1;$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \right) + \sin \frac{x}{2} = 1;$$

$$\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 1; \quad \cos \frac{x}{2} = 1; \quad \frac{x}{2} = 2\pi k;$$

$$x = 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{4\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3) \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = 1.$$

$$-\cos 2x - \cos 2x = 1; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi k; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \operatorname{tg} (\pi - x) - 2\sqrt{3} = 0.$$

$$-\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} = 0; \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}; \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin^2 (2\pi - x) = 2.$$

$$\sin^2 x + \sin^2 x = 2; \quad \sin^2 x = 1; \quad \cos^2 x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \sin \frac{5\pi}{2} - \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{4} \right) = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right).$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 4 \cos x; \quad 1 + 1 = 4 \cos x;$$

$$\cos x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Проверочная работа 1

1. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, если $\cos \alpha = -0,8$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
и $\sin \beta = -\frac{12}{13}$ при $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\sin 2\beta$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
и $\operatorname{ctg} \beta = \frac{21}{20}$ при $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x$, если $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\operatorname{tg} 2\alpha + 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2. Решите уравнения:

1) $\cos 6x \cdot \cos 5x + \sin 6x \cdot \sin 5x = -1$;

2) $\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos x = 1$;

3) $\cos(\pi - x) + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt{2}$;

4) $\operatorname{tg} \left(\frac{19\pi}{9} + x \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{18} + x \right) = -2$;

5) $\left[1 - \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \right] [1 + \cos(\pi - x)] = 1$;

6) $\cos^2 \frac{13\pi}{15} + \sin^2 \frac{28\pi}{15} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x$.

Решение проверочной работы 1**1. Вычислите:**

$$1) \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \operatorname{tg} 2\alpha \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \text{ если } \cos \alpha = -0,8 \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\text{и } \sin \beta = -\frac{12}{13} \text{ при } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

$$a) \sin \alpha > 0; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,8)^2} = 0,6;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4};$$

$$б) \cos \beta < 0; \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{12}{5}} = \frac{33}{20 + 36} = \boxed{\frac{33}{56}}.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{6}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \boxed{-\frac{24}{7}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{18}{-12} = \boxed{-1,5}.$$

$$2) \cos(\alpha - \beta), \cos \frac{\alpha}{2} \text{ и } \sin 2\beta, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15} \text{ при } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\text{и } \operatorname{ctg} \beta = \frac{21}{20} \text{ при } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

$$a) \cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{8}{15}\right)^2}} = -\frac{15}{17};$$

$$\sin \alpha > 0; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$6) \cos \beta < 0; \quad \cos \beta = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}};$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{21}{20}}{-\sqrt{1 + \left(\frac{21}{20}\right)^2}} = -\frac{21}{29};$$

$$\sin \beta < 0; \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{21}{29}\right)^2} = -\frac{20}{29};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= -\frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) + \frac{8}{17} \cdot \left(-\frac{20}{29}\right) = \\ &= \frac{315 - 160}{17 \cdot 29} = \boxed{\frac{155}{493}}; \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} > 0; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{15}{17}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{17}}{17}};$$

$$\sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{20}{21}}{1 + \left(\frac{20}{21}\right)^2} = \boxed{\frac{840}{841}}.$$

$$3) \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x, \text{ если } \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ тогда } \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = \frac{1}{2};$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 2x \cdot \cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos 4x}{2 \sin 2x \cdot \cos 2x} = \frac{\cos 4x}{2 \sin 2x},$$

$$\text{по } \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x; \quad \cos 4x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

$$4) \operatorname{tg} 2\alpha + 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$a) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{9 - 16} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7};$$

$$б) \cos \alpha < 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin \alpha < 0; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$в) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{4}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)} = -2;$$

$$г) \operatorname{tg} 2\alpha + 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3\frac{3}{7} + 3 \cdot (-2) = \boxed{-9\frac{3}{7}}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \cos 6x \cdot \cos 5x + \sin 6x \cdot \sin 5x = -1.$$

$$\cos(6x - 5x) = -1;$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$2) \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos x = 1.$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \right) - \cos x = 1;$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) - \cos x = 1;$$

$$\cos x - \sin x - \cos x = 1;$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \cos(\pi - x) + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt{2}.$$

$$-\cos x - \cos x = \sqrt{2}; \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k;$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \operatorname{tg} \left(\frac{19\pi}{9} + x \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{18} + x \right) = -2.$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{9} + x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{9} + x \right) = -2;$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{9} + x \right) = -1; \quad \frac{\pi}{9} + x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{13\pi}{36} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \left[1 - \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \right] [1 + \cos(\pi - x)] = 1.$$

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1;$$

$$1 - \cos^2 x = 1; \quad \cos^2 x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \cos^2 \frac{13\pi}{15} + \sin^2 \frac{28\pi}{15} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x.$$

$$\cos^2 \frac{2\pi}{15} + \sin^2 \frac{2\pi}{15} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x;$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x = 1; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad 2x = \frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 15**1. Вычислите:**

1) $2 \sin 30^\circ - \sqrt{3} \sin 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$;

2) $\frac{6 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}$;

3) $\frac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cdot \cos 19^\circ}$;

4) $\cos 75^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ$;

5) $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$ при $360^\circ < \alpha < 450^\circ$;

6) $\operatorname{tg} \beta$, $\cos 2\beta$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 5$
($\alpha \in (0; 2\pi)$);

7) $\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, если $\sin x - \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ при $0 < x < \frac{2\pi}{3}$.

2. Упростите:

1) $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\alpha - \pi)$;

2) $\frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3} \cos(2\alpha - 3\pi)}$;

3) $\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;

4) $\cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)$;

3. Решите уравнения:

1) $(2 \sin \pi x - \sqrt{3})(\sqrt{2} \cos \pi x + 1) = 0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 0$;

$$3) \sin \frac{2\pi x}{3} + \sin^2 \frac{\pi x}{6} = \cos^2 \frac{\pi x}{6};$$

$$4) 2 \cos^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$5) \sin^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \cos \frac{\pi x}{3} = 5;$$

$$6) \sin 3x + \sin x = 0.$$

Решение тренировочной работы 15

1. Вычислите:

$$1) 2 \sin 30^\circ - \sqrt{3} \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$2) \frac{6 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} =$$

$$= \frac{3 \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 3 \operatorname{tg} 60^\circ = \boxed{3\sqrt{3}}.$$

3.5

$$3) \frac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cdot \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cdot \cos 19^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 26^\circ \cdot \cos 4^\circ - \sin 4^\circ \cdot \cos 26^\circ}{\sin 19^\circ \cdot \cos 41^\circ - \sin 41^\circ \cdot \cos 19^\circ} = \frac{\sin 22^\circ}{-\sin 22^\circ} = \boxed{-1}.$$

$$4) \cos 75^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 75^\circ =$$

$$= \frac{\cos 75^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \sin 75^\circ =$$

$$= \frac{\cos 75^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

$$5) \cos \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15} \text{ при } 360^\circ < \alpha < 450^\circ.$$

$$a) \cos \alpha > 0; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 15}} = \frac{1}{4};$$

$$180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 225^\circ; \cos \frac{\alpha}{2} < 0;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{5}{8}} = \boxed{-\frac{1}{4}\sqrt{10}};$$

$$6) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{1 - 15} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{7}}.$$

6) $\operatorname{tg} \beta$, $\cos 2\beta$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 5$

($\alpha \in (0; 2\pi)$).

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} &= \frac{2}{3}; \\ \frac{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} &= \frac{2}{3}; \quad \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, то $\frac{1 - \frac{1}{5} \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \beta} = \frac{2}{3}$; $\frac{5 - \operatorname{tg} \beta}{5 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{2}{3}$;

$$15 - 3 \operatorname{tg} \beta = 10 + 2 \operatorname{tg} \beta; \quad 5 \operatorname{tg} \beta = 5; \quad \operatorname{tg} \beta = 1;$$

б) $\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$; $\cos 2\beta = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$; $\cos 2\beta = 0$;

в) $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$;

Поскольку $\operatorname{ctg} \alpha = 5$, $\alpha \in \text{I}$ или $\alpha \in \text{III}$. Рассмотрим оба варианта.

г) Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\cos \alpha > 0$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{5}{\sqrt{26}};$$

$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{\sqrt{26}}}{2}} = \sqrt{\frac{26 - 5\sqrt{26}}{52}}. \quad (5.8)$$

д) Пусть $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\cos \alpha < 0$;

$$\sin \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \left(\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \right). \quad \text{Тогда } \cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{\sqrt{26}}}{2}} = \sqrt{\frac{26 + 5\sqrt{26}}{52}}. \quad (5.9)$$

Ответ: если $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ ($\alpha \in (0; 2\pi)$)

$$\text{то } \operatorname{tg} \beta = 1; \quad \cos 2\beta = 0;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{26 - 5\sqrt{26}}{52}} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{26 + 5\sqrt{26}}{52}} \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$7) \sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \text{ если } \sin x - \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3} \text{ при } 0 < x < \frac{2\pi}{3}.$$

$$a) \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1 + 4\sqrt{2} + 8}{9};$$

так как $\sin x > \cos x$,

$$\text{то } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ и } 0 < x < \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{значит } x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$1 - \sin 2x = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2}; \quad \sin 2x = -\frac{4}{9}\sqrt{2};$$

$\sin 2x < 0$, тогда $2x \in (\pi; 2\pi)$, получим

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}; & \pi < 2x < \frac{4\pi}{3}; & \cos 2x < 0; \\ \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$\cos 2x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\sqrt{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{32}{81}} = -\frac{7}{9}.$$

б) Так как $\pi < 2x < \frac{4\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$, значит

$$\begin{cases} \cos x < 0; \\ \sin x > 0; \end{cases}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{7}{9}\right)}{2}} = -\frac{1}{3}; \quad \sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{1}.$$

Ответ: $\sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$, если $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Примечание. При $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ условие $\sin x - \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ не выполняется.

2. Упростите:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\alpha - \pi) = \\ & = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]} \cdot \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - (-\sin \alpha)(-\sin \alpha) = \\ & = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \cdot \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} - \sin^2 \alpha = \\ & = 1 - \sin^2 \alpha = \boxed{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3} \cos(2\alpha - 3\pi)} = \\ & = \frac{-\sin 2\alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \\ & = \frac{-\sin 2\alpha - 2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2\alpha + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2\alpha + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2\alpha - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \\ & = \frac{-\sin 2\alpha - \sqrt{3} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\sqrt{3} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \boxed{-\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \\
 & = \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\
 & = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha).$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \cos^2(60^\circ + \alpha) = (\cos 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha)^2 = \\
 & = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \\
 & = \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \cos^2(60^\circ - \alpha) = (\cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha)^2 = \\
 & = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)^2 = \\
 & = \frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \\
 & = \frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = \\
 & = \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha + \\
 & \quad + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \\
 & = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) =$$

$$= \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha = \frac{3}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \boxed{1,5}.$$

Возможен другой способ:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = \\
 &= \cos^2 \alpha + \frac{1 + \cos(120^\circ + 2\alpha)}{2} + \frac{1 + \cos(120^\circ - 2\alpha)}{2} = \\
 &= \cos^2 \alpha + 1 + \frac{1}{2} (\cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos(120^\circ - 2\alpha)) = \\
 & \left[\begin{array}{l} \text{а) } \cos(120^\circ + 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha - \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ \quad = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha; \\ \text{б) } \cos(120^\circ - 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha + \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ \quad = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha; \\ \text{в) } -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha = -\cos 2\alpha. \end{array} \right] \\
 &= \cos^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha = 1 + \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} (1 - 2\cos^2 \alpha) = \boxed{1,5}.
 \end{aligned}$$

3. Решите уравнения:

1) $(2\sin \pi x - \sqrt{3})(\sqrt{2} \cos \pi x + 1) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \pi x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} \pi x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \\ \pi x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi n \end{array} \right];$$

$$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{1}{3} + k \\ x = \pm \frac{3}{4} + 2n \end{array} \right].$$

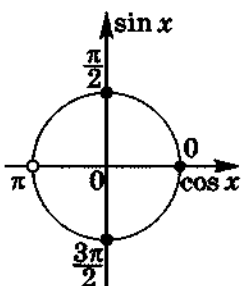
Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{3} + k; \pm \frac{3}{4} + 2n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

2) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 0.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = \pi k \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} k \\ x \neq \pi + 2\pi n \end{array} \right\};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = 2\pi n \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.



$$3) \sin \frac{2\pi x}{3} + \sin^2 \frac{\pi x}{6} = \cos^2 \frac{\pi x}{6}.$$

$$\sin \frac{2\pi x}{3} + \sin^2 \frac{\pi x}{6} - \cos^2 \frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$2 \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi x}{3} - \cos \frac{\pi x}{3} = 0;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (5.2)$$

$$2 \cos \frac{\pi x}{3} \left[\sin \frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \right] = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} = 0 \\ \sin \frac{\pi x}{3} = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1,5 + 3k \\ x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} + 3n \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ 1,5 + 3k; (-1)^n \cdot \frac{1}{2} + 3n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$4) 2 \cos^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0; \quad 2 - 2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} - 3 \sin \frac{\pi x}{6} - 2 = 0;$$

$$\left(\sin \frac{\pi x}{6} \right)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4};$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{6} = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \frac{\pi x}{6} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi k;$$

$$x = (-1)^k \cdot (-1) + 6k.$$

Ответ: $\{ (-1)^{k+1} + 6k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$$5) \sin^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \cos \frac{\pi x}{3} = 5.$$

$$1 - \cos^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \cos \frac{\pi x}{3} = 5; \quad \cos^2 \frac{\pi x}{3} - 5 \cos \frac{\pi x}{3} + 4 = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} = 4 \notin [-1; 1] \\ \cos \frac{\pi x}{3} = 1 \end{cases}; \quad \frac{\pi x}{3} = 2\pi k; \quad x = 6k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$6) \sin 3x + \sin x = 0.$$

Для решения этого уравнения необходимо знать формулу тройного угла для $\sin 3\alpha$. Выведем ее.

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha(1 - 2\sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2(1 - \sin^2 \alpha)\sin \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \end{aligned}$$

т. е. $\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}$. 6.1

Тогда уравнение примет вид $3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 0$;
 $4\sin x(1 - \sin^2 x) = 0$; $4\sin x \cdot \cos^2 x = 0$;

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Примечание. Несколько позже, зная новые формулы, переводящие суммы тригонометрических отношений в их произведение, получим более изящное решение.

Проверочная работа 2**1. Вычислите:**

1) $2 \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - 3 \sin 45^\circ$;

2) $\frac{1 - 2 \sin^2 60^\circ}{2 \cos^2 60^\circ - 1}$;

3) $\frac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cdot \cos 25^\circ}$;

4) $\sin 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 75^\circ$;

5) $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{15}$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

6) $\operatorname{tg} \beta$, $\sin 2\alpha$ и $\cos \frac{\beta}{2}$, если $2 \cos(\alpha - \beta) = 3 \cos(\alpha + \beta)$
и $\operatorname{ctg} \alpha = 2$;

7) $3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ при $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$.

2. Упростите:

1) $\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \cos(\pi - \alpha) \cdot \sin(3\pi + \alpha)}{[\cos(3,5\pi - \alpha) + \sin(1,5\pi + \alpha)]^2 - 1}$;

2) $\frac{\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{11\pi}{6} - \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}$;

3) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

4) $\sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha)$.

3. Решите уравнения:

1) $(\sqrt{2} \sin \pi x - 1)(2 \cos \pi x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$;

$$3) \sin \pi x + \cos^2 \frac{\pi x}{4} = \sin^2 \frac{\pi x}{4};$$

$$4) 2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \cos \frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$5) \cos^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \sin \frac{\pi x}{3} = 5;$$

$$6) \cos 3x - \cos x = 0.$$

Решение проверочной работы 2

1. Вычислите:

$$1) 2 \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - 3 \sin 45^\circ =$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$2) \frac{1 - 2 \sin^2 60^\circ}{2 \cos^2 60^\circ - 1} = \frac{\cos 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \boxed{1}.$$

$$3) \frac{\cos 66^\circ \cdot \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cdot \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cdot \cos 25^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 24^\circ \cdot \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cdot \cos 25^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \boxed{1}.$$

$$4) \sin 75^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 75^\circ =$$

$$= \sin 75^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \cos 75^\circ =$$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

$$5) \sin \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{15} \text{ при } 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

$$a) \cos \alpha < 0; \quad \sin \frac{\alpha}{2} > 0;$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{1 + 15}} = -\frac{\sqrt{15}}{4};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{4}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}};$$

$$б) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}};$$

$$\begin{aligned} в) \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{\frac{15-1}{15}} = -\frac{15}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{7}}. \end{aligned}$$

6) $\operatorname{tg} \beta$, $\sin 2\alpha$ и $\cos \frac{\beta}{2}$, если $2 \cos(\alpha - \beta) = 3 \cos(\alpha + \beta)$
и $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

$$\begin{aligned} а) \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} &= \frac{3}{2}; \\ \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} &= \frac{3}{2}; \quad \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1} = \frac{3}{2}; \\ \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} &= \frac{2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } \frac{2 \operatorname{ctg} \beta + 1}{2 \operatorname{ctg} \beta - 1} &= \frac{3}{2}; \quad 4 \operatorname{ctg} \beta + 2 = 6 \operatorname{ctg} \beta - 3; \\ 2 \operatorname{ctg} \beta &= 5; \quad \operatorname{ctg} \beta = 2,5; \quad \operatorname{tg} \beta = \boxed{0,4}; \end{aligned}$$

$$б) \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}};$$

Учтем, что $\operatorname{tg} \beta = 0,4$, значит $\beta \in \text{I}$ или $\beta \in \text{III}$.

$$в) \text{ при } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \cos \beta > 0, \quad \cos \frac{\beta}{2} > 0;$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}};$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29};$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}};$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5\sqrt{29}}{29}}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{29 + 5\sqrt{29}}{58}}};$$

$$г) \text{ при } \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \quad \cos \beta < 0; \quad \cos \frac{\beta}{2} < 0;$$

$$\cos \beta = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}; \quad \cos \beta = -\frac{5\sqrt{29}}{29};$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{5\sqrt{29}}{29}}{2}} = \boxed{-\sqrt{\frac{29 - 5\sqrt{29}}{58}}}.$$

$$7) \ 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ если } \sin x + \cos x = \frac{1}{5} \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}, \text{ тогда } \pi < 2x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\left(\sin x > -\cos x \text{ на } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}; \quad \sin 2x = -\frac{24}{25};$$

$$\cos 2x < 0;$$

$$\cos 2x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25};$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 3 \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \boxed{6}.$$

2. Упростите:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \cos(\pi - \alpha) \cdot \sin(3\pi + \alpha)}{[\cos(3,5\pi - \alpha) + \sin(1,5\pi + \alpha)]^2 - 1} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - (-\cos \alpha) \cdot (-\sin \alpha)}{(-\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1} = \\
 &= \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right)}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\
 &= \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \boxed{\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad &\frac{\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{11\pi}{6} - \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)} = \\
 &= \frac{\sin \alpha + 2 \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} - \alpha \right)}{2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin \alpha + 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha - 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \\
 &= \frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \boxed{\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad &\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \\
 &= \cos \alpha - \sin \alpha \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha - (1 + \cos \alpha) = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$4) \sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha).$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } &\sin^2(60^\circ + \alpha) = (\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha)^2 = \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 = \\
 &= \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = \\
 &= \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sin^2(60^\circ - \alpha) &= (\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha)^2 = \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 = \\
 &= \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) &= \\
 &= \frac{3}{4} \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \\
 &\quad + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = \\
 &= \frac{3}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Поэтому } \sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) &= \\
 = \sin^2 \alpha + \frac{3}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha &= \frac{3}{2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \boxed{1,5}.
 \end{aligned}$$

Возможен другой способ:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \alpha + \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ - \alpha) &= \\
 = \sin^2 \alpha + \frac{1 - \cos(120^\circ + 2\alpha)}{2} + \frac{1 - \cos(120^\circ - 2\alpha)}{2} &= \\
 = \sin^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} (\cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos(120^\circ - 2\alpha)) &= \\
 \left[\begin{array}{l} \text{а) } \cos(120^\circ + 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha - \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ \quad = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha; \\ \text{б) } \cos(120^\circ - 2\alpha) = \cos 120^\circ \cdot \cos 2\alpha + \sin 120^\circ \cdot \sin 2\alpha = \\ \quad = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha; \\ \text{в) } \cos(120^\circ + 2\alpha) + \cos(120^\circ - 2\alpha) = \\ \quad = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha = -\cos 2\alpha. \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \sin^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2\alpha) =$$

$$= \sin^2 \alpha + 1 - \frac{1}{2} (2\sin^2 \alpha - 1) = \boxed{1,5}.$$

3. Решите уравнения:

$$1) (\sqrt{2} \sin \pi x - 1) (2 \cos \pi x + \sqrt{3}) = 0.$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin \pi x - 1 = 0; \\ 2 \cos \pi x + \sqrt{3} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \cos \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \pi x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = (-1)^k \cdot \frac{1}{4} + k \\ x = \pm \frac{5}{6} + 2n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$

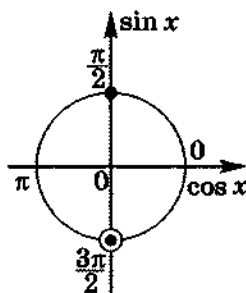
$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^k \cdot \frac{1}{4} + k; \pm \frac{5}{6} + 2n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases};$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$



$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin \pi x + \cos^2 \frac{\pi x}{4} = \sin^2 \frac{\pi x}{4}.$$

$$\sin \pi x + \cos^2 \frac{\pi x}{4} - \sin^2 \frac{\pi x}{4} = 0; \quad \sin \pi x + \cos \frac{\pi x}{2} = 0;$$

$$2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{\pi x}{2} = 0; \quad 2 \cos \frac{\pi x}{2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = -\frac{1}{2}; \\ \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k; \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} + 2k \\ x = 1 + 2n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} + 2k; 1 + 2n \mid k, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

4) $2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \cos \frac{\pi x}{6} = 0.$

$$2 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{6}\right) + 3 \cos \frac{\pi x}{6} = 0; \quad 2 \cos^2 \frac{\pi x}{6} - 3 \cos \frac{\pi x}{6} - 2 = 0;$$

$$\left(\cos \frac{\pi x}{6}\right)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{6} = 2 \notin [-1; 1] \\ \cos \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\frac{\pi x}{6} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm 4 + 12k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{\pm 4 + 12k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

5) $\cos^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \sin \frac{\pi x}{3} = 5.$

$$1 - \sin^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \sin \frac{\pi x}{3} = 5; \quad \sin^2 \frac{\pi x}{3} - 5 \sin \frac{\pi x}{3} + 4 = 0;$$

$$\left(\sin \frac{\pi x}{3}\right)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2};$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{3} = 4 \notin [-1; 1] \\ \sin \frac{\pi x}{3} = 1 \end{cases}; \quad \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = 1,5 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{1,5 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

$$6) \cos 3x - \cos x = 0.$$

Для решения этого уравнения необходимо вывести формулу косинуса тройного угла.

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha = \\&= \cos \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \\&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \\&= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,\end{aligned}$$

$$\text{т. е. } \boxed{\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} \quad \text{6.2}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - \cos x = 0;$$

$$4 \cos x (\cos^2 x - 1) = 0;$$

$$-4 \cos x \cdot \sin^2 x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \pi n \end{cases}, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{2} t \mid t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} t \mid t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5

Суммы и произведения тригонометрических функций

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

Напомним известные формулы:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (7.1)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (7.2)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (7.3)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad (7.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases}; \quad (7.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases}; \quad (7.6)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]; \quad (7.7)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \quad 7.8$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]; \quad 7.9$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right); \quad 7.10$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right); \quad 7.11$$

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \right), & \text{если } B > 0; \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \right), & \text{если } B < 0; \\ \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right), & \text{если } A > 0; \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right), & \text{если } A < 0. \end{cases} \quad 7.12$$

Практикум 9

1. Разложите на множители:

1) $\sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2}$;

2) $\cos 10\alpha \cdot \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cdot \cos 6\alpha$;

3) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;

2) $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha$.

3. Вычислите:

1) $\sin^2 68^\circ - \sin^2 38^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3$;

2) $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ}$;

3) $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ$;

4) $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}}$;

5) $\frac{5 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{14} \right]}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}}$;

6) $\frac{\sin^2 32^\circ + \sin 26^\circ}{5 \cos^2 32^\circ}$;

7) $\frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ}$;

8) $\frac{2 \cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ}$;

- 9) $\frac{3 \cos 196^\circ + 12 \cos 164^\circ}{\cos 16^\circ};$
- 10) $\frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin 77^\circ};$
- 11) $\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ};$
- 12) $\frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ};$
- 13) $\frac{2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha},$ если $\operatorname{tg} \alpha = 2;$
- 14) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$ если $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4};$
- 15) $\operatorname{tg} x,$ если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x;$
- 16) $\cos 2\alpha,$ если $\sin \alpha = -\frac{1}{4};$
- 17) $\operatorname{tg} \alpha,$ если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2;$
- 18) $\sin(\pi + 2\alpha),$ если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$
- 19) $2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha,$ если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6};$
- 20) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right),$ если $\sin \alpha = 0,6;$
- 21) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha \right),$ если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3};$
- 22) $\cos \alpha + \cos \beta,$ если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$ а $\alpha + \beta = 4\pi;$
- 23) $\cos(\alpha + \beta),$ если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2},$ а $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2};$

24) $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ при $\sin x = 0,21$;

25) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Решите уравнения:

1) $\sin 2x + \sin 4x = 0$;

2) $\cos 3x - \cos 5x = 0$;

3) $\sin 3x \cdot \sin 5x = \cos 4x \cdot \cos 2x$;

4) $\sin 2x \cdot \cos 6x = \sin 3x \cdot \cos 5x$;

5) $\sin 3x + \cos 3x = 1$;

6) $\cos 4x - \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение практикума 9

1. Разложите на множители:

$$1) \sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2} =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\frac{5\alpha}{3} + \frac{3\alpha}{2}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{5\alpha}{3} - \frac{3\alpha}{2}}{2} \right) = 2 \sin \frac{19\alpha}{12} \cdot \cos \frac{\alpha}{12}.$$

$$2) \cos 10\alpha \cdot \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cdot \cos 6\alpha =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cos 8\alpha \cdot \cos \left(\frac{10\alpha + 6\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{10\alpha - 6\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cos 8\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cos^2 8\alpha \cdot \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

$$3) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1) =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot 2 \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.1)$$

$$= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{3}}{2} \right) =$$

$$= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$L = \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (7.4)$$

$$= \frac{2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$L = \operatorname{ctg} \alpha \quad \left| \begin{array}{l} L = \operatorname{ctg} \alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg} \alpha \end{array} \right. \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

$$2) \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha.$$

$$L = \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]; \quad (7.7)$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)} =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7.3)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (7.4)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \quad (5.2)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6\alpha) - \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha)} = \\
 &= \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 2 \cos 2\alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 L = 2 \cos 2\alpha \\
 \Pi = 2 \cos 2\alpha
 \end{array} \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

3. Вычислите:

$$1) \sin^2 68^\circ - \sin^2 38^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 =$$

$$\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)} \quad 5.2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 136^\circ) - \frac{1}{2}(1 - \cos 76^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 - 0,5 \cos 136^\circ - 0,5 + 0,5 \cos 76^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5(\cos 76^\circ - \cos 136^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 \cdot (-2) \cdot \sin 106^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 \sin 106^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \quad \boxed{\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)} \quad 3.6$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3[\cos(90^\circ - 70^\circ) - \sin 20^\circ]}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3(\sin 70^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \\
 &= \frac{3 \cdot 2 \sin 25^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$3) (\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad 5.1$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sin 14^\circ \cdot \sin 28^\circ + \cos 14^\circ \cdot \cos 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ}{\cos 14^\circ \cdot 2 \sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ} = \\
 &= \frac{\cos(28^\circ - 14^\circ)}{2 \cos 14^\circ} = \frac{\cos 14^\circ}{2 \cos 14^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$4) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}} =$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$

$$\sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha; \quad \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$$

5.1

$$= \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{2\pi}{5}}{1 - \left(\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{5}}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{4\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{5}}{4 - 1 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} - \cos^2 \frac{4\pi}{5} - \sin^2 \frac{4\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{5}}{2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{5}}{2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$5) \frac{5 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{14} \right]}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{5 \left(\sin \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} \right)}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} = \frac{5 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} = \boxed{10}.$$

$$6) \frac{\sin^2 32^\circ + \sin 26^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 64^\circ) + \sin(90^\circ - 64^\circ)}{5 \cos^2 32^\circ} =$$

$$= \frac{0,5 - 0,5 \cos 64^\circ + \cos 64^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} =$$

$$= \frac{0,5 + 0,5 \cos 64^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} = \frac{\cos^2 32^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 21^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} = \\
 &= \frac{\sqrt{3} \cos 21^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{2 \cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} = \\
 &= \frac{1 + \cos 32^\circ + 1 + \cos 152^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-1 + 2 \cos 92^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \\
 &= \frac{-1 + \cos 92^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-(1 - \cos 92^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-2 \sin^2 46^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \\
 &= -\frac{2 \sin^2(90^\circ - 44^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = -\frac{2 \cos^2 44^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \frac{3 \cos 196^\circ + 12 \cos 164^\circ}{\cos 16^\circ} = \\
 &= \frac{3 \cos(180^\circ + 16^\circ) + 12 \cos(180 - 16^\circ)}{\cos 16^\circ} = \\
 &= \frac{-3 \cos 16^\circ - 12 \cos 16^\circ}{\cos 16^\circ} = \boxed{-15}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin 77^\circ} = \\
 &= \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin(90^\circ - 13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \cos 13^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 24^\circ \cdot \cos 12^\circ + 2 \cos 24^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 24^\circ (\cos 12^\circ + \cos 18^\circ)}{\sin(90^\circ - 3^\circ) \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 24^\circ} = \frac{2 \cdot 2 \cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \cos 3^\circ} = \boxed{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad & \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 13^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ} = \\
 & = \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin(90^\circ + 23^\circ) + \cos(180^\circ + 23^\circ)}{0,5(\cos 23^\circ + \cos 3^\circ) - 0,5(\cos 157^\circ + \cos 3^\circ)} = \\
 & = \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \cos 23^\circ - \cos 23^\circ}{0,5 \cos 23^\circ + 0,5 \cos 3^\circ - 0,5 \cos(180^\circ - 23^\circ) - 0,5 \cos 3^\circ} = \\
 & = -\frac{\cos 23^\circ}{0,5 \cos 23^\circ + 0,5 \cos 23^\circ} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \frac{2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2. \\
 & \frac{2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha} = \frac{(2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{(1 + 5 \cos^2 \alpha) : \cos^2 \alpha} = \\
 & = \frac{\frac{2}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 5} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 5} = \frac{2(1 + 4) + 2}{1 + 4 + 5} = \boxed{1,2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad & \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right), \text{ если } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}. \\
 & \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \\
 & = 2 \sin \frac{\left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{2} = \\
 & = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \operatorname{tg} x, \text{ если } \sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x. \\
 & \sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x; \\
 & 2 \sin \frac{x + 30^\circ + x - 30^\circ}{2} \cdot \cos \frac{x + 30^\circ - x + 30^\circ}{2} = 2\sqrt{3} \cos x; \\
 & 2 \sin x \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cos x; \quad \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos x; \\
 & \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

16) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

17) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

18) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

19) $2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$.

$$\begin{aligned} 2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha &= \cos \alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha = \\ &= \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot 0,6 - 1 = \boxed{0,2}. \end{aligned}$$

7.9

20) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,6$.

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha) = \frac{1 + 0,6}{2} = \boxed{0,8}. \end{aligned}$$

5.8

21) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2\alpha = \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (2\sqrt{3})^2}{1 + (2\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cdot (2\sqrt{3})}{1 + (2\sqrt{3})^2} = \\&= \frac{1 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3}{2(1 + 12)} = \boxed{\frac{1}{26}}.\end{aligned}$$

22) $\cos \alpha + \cos \beta$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, а $\alpha + \beta = 4\pi$.

Если $\alpha + \beta = 4\pi$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \\&= 2 \cos \frac{4\pi}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 2 \cos 2\pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

23) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$, а $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

Если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, то

$$\boxed{\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]} \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos(\alpha + \beta) \right);$$

$$1 = 0 - \cos(\alpha + \beta); \quad \cos(\alpha + \beta) = \boxed{-1}.$$

$$24) \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \text{ при } \sin x = 0,21.$$

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1 + \sin x; \quad \sin x = 0,21;$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,21; \quad 1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,21 + 1;$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 1,21;$$

$$\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 = 1,21; \quad \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{1,21} = \boxed{\pm 1,1}.$$

$$25) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{16};$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha =$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \sin 2x + \sin 4x = 0.$$

$$2 \sin \frac{2x+4x}{2} \cdot \cos \frac{4x-2x}{2} = 0; \quad \sin 3x \cdot \cos x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3}k; \frac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \cos 3x - \cos 5x = 0.$$

$$2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cdot \sin \frac{5x-3x}{2} = 0; \quad \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4}k, \\ x = \pi n \end{cases}, \text{ значит, } x = \frac{\pi}{4}k \text{ как более общий случай.}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin 3x \cdot \sin 5x = \cos 4x \cdot \cos 2x.$$

$$\frac{1}{2} [\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)] =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(4x+2x) + \cos(4x-2x)];$$

$$\cos 2x - \cos 8x = \cos 6x + \cos 2x; \quad \cos 6x + \cos 8x = 0;$$

$$2 \cos \frac{6x+8x}{2} \cdot \cos \frac{8x-6x}{2} = 0; \quad \cos 7x \cdot \cos x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k; \frac{\pi}{2} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \sin 2x \cdot \cos 6x = \sin 3x \cdot \cos 5x.$$

$$\frac{1}{2} [\sin(2x+6x) + \sin(2x-6x)] = \frac{1}{2} [\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)];$$

$$\sin 8x - \sin 4x = \sin 8x - \sin 2x;$$

$$\sin 4x - \sin 2x = 0; \quad 2 \sin \frac{4x-2x}{2} \cdot \cos \frac{4x+2x}{2} = 0;$$

$$\sin x \cdot \cos 3x = 0; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5) $\sin 3x + \cos 3x = 1.$

7.10

$$\sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{12} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6) $\cos 4x - \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

7.11

$$\sqrt{2} \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}; \quad 4x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$4x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = -\frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{16} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тренировочная работа 16

1. Разложите на множители:

1) $1 + \sin \frac{2\alpha}{3}$;

2) $\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha$;

3) $1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

2) $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2$;

2) $\frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) \cdot \cos 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ}$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$;

4) $\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}}$;

5) $\frac{3 \left[\cos \frac{\pi}{5} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) \right]}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}}$;

6) $\operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ} \right)$;

7) $\frac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \sin 87^\circ}$;

8) $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3$;

- 9) $\frac{2 \cos 201^\circ - 16 \sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$;
- 10) $\frac{3 \cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ}$;
- 11) $\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ}$;
- 12) $\frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin 27^\circ - 4 \sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ}$;
- 13) $\frac{3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$;
- 14) $2 \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,8}$;
- 15) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,4$;
- 16) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 17) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$.

4. Решите уравнения:

- 1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$;
- 2) $\cos 2x + \cos 8x = \cos 4x + \cos 6x$;
- 3) $\sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x$;
- 4) $\cos 4x \cdot \cos 2x = \sin 6x \cdot \sin 8x$;
- 5) $\cos 3x \cdot \sin 5x = \cos 5x \cdot \sin 7x$;
- 6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение тренировочной работы 16**1. Разложите на множители:**

$$1) 1 + \sin \frac{2\alpha}{3} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{2\alpha}{3} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{3} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{3} \right) =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{3\pi + 4\alpha}{12} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi - 4\alpha}{12} \right).$$

$$2) \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha =$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - 2 \sin \left(\frac{2\alpha + 4\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{2\alpha - 4\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot (\sin \alpha + \sin 2\alpha) = 4 \sin 3\alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$3) 1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2\sqrt{2} \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$L = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \Pi = \operatorname{tg}^2 \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}$$

$$2) \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$L = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{\cos^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1}{\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\
 &= \frac{\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \\
 \Pi &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \quad \Big| \Rightarrow L = \Pi, \text{ что и требовалось доказать.}
 \end{aligned}$$

3. Вычислите:

$$1) \sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(\cos 26^\circ - \cos 60^\circ) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 26^\circ - 2 = \\
 &= \frac{1}{2} \cos 26^\circ - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 26^\circ - 2 = \boxed{-1,75}.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) \cdot \cos 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos 10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} \cdot \cos 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \sin(90^\circ - 80^\circ)}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 80^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$3) \frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ} \left(\operatorname{tg} 15^\circ - \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} \right) = \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 15^\circ - 1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 30^\circ} \cdot (-2 \operatorname{ctg} 30^\circ) = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\
 & = \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\
 & = \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}}\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\
 & = \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{1}{0,5 \sin \frac{2\pi}{7}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{3 \left[\cos \frac{\pi}{5} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) \right]}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \\
 & = \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{3 \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ} \right) = \\
 & = \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{\cos 14^\circ}{\sin 14^\circ} \right) = \\
 & = \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1 + \cos 14^\circ}{\sin 14^\circ} \right) = \operatorname{tg} 7^\circ \cdot \operatorname{ctg} 7^\circ = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \sin 87^\circ} = \\
 & = \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 3^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \sin(90^\circ - 3^\circ)} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \cos 3^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \cos 3^\circ} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3 = \\
 & = 0,5(1 + \cos 46^\circ) + 0,5(1 + \cos 166^\circ) + \\
 & \quad + 0,5(1 + \cos 74^\circ) + 3 = \\
 & = 0,5 + 0,5 \cos 46^\circ + 0,5 + 0,5 \cos(180^\circ - 14^\circ) + \\
 & \quad + 0,5 + 0,5 \cos 74^\circ + 3 = \\
 & = 4,5 + 0,5 \cos 46^\circ - 0,5 \cos 14^\circ + 0,5 \cos 74^\circ = \\
 & = 4,5 - \sin 30^\circ \cdot \sin 16^\circ + 0,5 \cos(90^\circ - 16^\circ) = \\
 & = 4,5 - 0,5 \sin 16^\circ + 0,5 \sin 16^\circ = \boxed{4,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \frac{2 \cos 201^\circ - 16 \sin 111^\circ}{\cos 21^\circ} = \\
 & = \frac{2 \cos(180^\circ + 21^\circ) - 16 \sin(90^\circ + 21^\circ)}{\cos 21^\circ} = \\
 & = \frac{-2 \cos 21^\circ - 16 \cos 21^\circ}{\cos 21^\circ} = \boxed{-18}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{3 \cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ} = \\
 & = \frac{3 \cos 9^\circ + \sin(90^\circ - 9^\circ)}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{3 \cos 9^\circ + \cos 9^\circ}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \boxed{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin \frac{36^\circ + 44^\circ}{2} \cdot \cos \frac{36^\circ - 44^\circ}{2} + 2 \sin \frac{40^\circ + 48^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 48^\circ}{2}}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 4^\circ + 2 \sin 44^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\
 & = \frac{2 \cos 4^\circ (\sin 40^\circ + \sin 44^\circ)}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin 42^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\sin(90^\circ - 2^\circ) \cdot \sin 42^\circ} = \frac{2 \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad & \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin 27^\circ - 4 \sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ} = \\
 & = \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin(90^\circ - 63^\circ) - 4 \sin(270^\circ - 63^\circ)}{0,5(\cos 63^\circ - \cos 93^\circ) + 0,5(\cos 63^\circ - \cos 87^\circ)} = \\
 & = \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \cos 63^\circ + 4 \cos 63^\circ}{0,5 \cos 63^\circ - 0,5 \cos(90^\circ + 3^\circ) + 0,5 \cos 63^\circ - 0,5 \cos(90^\circ - 3^\circ)} = \\
 & = \frac{11 \cos 63^\circ}{\cos 63^\circ + 0,5 \sin 3^\circ - 0,5 \sin 3^\circ} = \frac{11 \cos 63^\circ}{\cos 63^\circ} = \boxed{11}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \frac{3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -2. \\
 & \frac{3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{(3 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{(6 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) : \cos^2 \alpha} = \\
 & = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha}{6 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{6 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\
 & = \frac{3(1 + 4) + 2}{6 - 4} = \boxed{8,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad & 2 \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha, \text{ если } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,8}. \\
 & 2 \cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 7\alpha = \cos 7\alpha + \cos \alpha - \cos 7\alpha = \\
 & = \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot 0,8 - 1 = \boxed{0,6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right), \text{ если } \sin \alpha = -0,4. \\
 & \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha) = \frac{1}{2} (1 - 0,4) = \boxed{0,3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad & \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha \right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
 & \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2\alpha - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin 2\alpha =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\
 &= \frac{1 - \frac{3}{4}}{2 \left(1 + \frac{3}{4}\right)} - \frac{3}{2 \left(1 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{4} - 3}{2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{11}{4}}{2 \cdot \frac{7}{4}} = \boxed{-\frac{11}{14}}.
 \end{aligned}$$

17) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,64;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,64; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,36;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,18;$$

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \\
 &= 0,8(1 + 0,18) = \boxed{0,944}.
 \end{aligned}$$

4. Решите уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$.

$$2 \sin \frac{x+5x}{2} \cdot \cos \frac{x-5x}{2} + \sin 3x = 0;$$

$$2 \sin 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x = 0; \quad 2 \sin 3x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x = \pi k \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}k \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \end{cases};$$

$$x = \frac{\pi}{3}k \text{ как более общий случай.}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \cos 2x + \cos 8x = \cos 4x + \cos 6x.$$

$$2 \cos \frac{2x+8x}{2} \cdot \cos \frac{2x-8x}{2} = 2 \cos \frac{4x+6x}{2} \cdot \cos \frac{4x-6x}{2};$$

$$\cos 5x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos x; \quad \cos 5x(\cos 3x - \cos x) = 0;$$

$$2 \cos 5x \cdot \sin \frac{3x-x}{2} \cdot \sin \frac{3x+x}{2} = 0;$$

$$\cos 5x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 5x = 0 \\ \sin x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \\ x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{2}p \end{cases}.$$

Заметим, что случай $x = \frac{\pi}{2}p$ включает в себя случай $x = \pi n$. Обобщая, получим ответ.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k; \frac{\pi}{2}p \mid k, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin x + \cos x = \sin 3x + \cos 3x.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

$$\sin x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \cos 4x \cdot \cos 2x = \sin 6x \cdot \sin 8x.$$

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 14x);$$

$$\cos 14x + \cos 6x = 0;$$

$$2 \cos 10x \cdot \cos 4x = 0; \quad \begin{cases} \cos 10x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 10x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \cos 3x \cdot \sin 5x = \cos 5x \cdot \sin 7x.$$

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 2x);$$

$$\sin 12x - \sin 8x = 0;$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 10x = 0; \quad \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 10x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0.$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

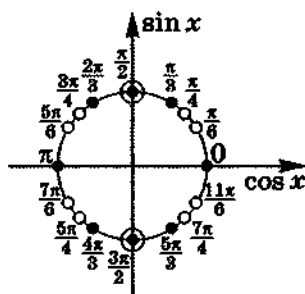
$$\sin 3x \cdot \frac{\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x \cdot (\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x - \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0; \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} 2x = 0; \\ \operatorname{tg} 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} n; \\ x = \frac{\pi}{3} p \end{cases} \quad D(Y) = \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0. \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Практикум 10

Рассмотрим более сложные примеры.

Вычислите:

- 1) $\left[\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) \right]^{-1}$, если $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \frac{3}{4}$;
- 2) $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}$, если $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1}{2}$;
- 3) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 4\alpha = 0,2$;
- 4) $5 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2}$, если $\cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{4}{5}$, где $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$;
- 5) $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ при $-\pi \leq x \leq \pi$;
- 6) $6(9 \sin 2\alpha + 7 \cos 2\alpha)^{-1}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$;
- 7) $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 0,3$;
- 8) $\frac{12 + 16 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{3}$;
- 9) $4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha$, если $\sin 4\alpha = 0,2$;
- 10) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$;
- 11) $3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$ при $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- 12) $128(\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha)$, если $\sin 2\alpha = 0,5$;
- 13) $\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}} (\sin^{12} \alpha - \cos^{12} \alpha)}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

$$14) \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}(45^\circ + 4\alpha) \cdot \cos^2(225^\circ - 4\alpha)}, \text{ если } \alpha = 3^\circ;$$

$$15) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - 8 \operatorname{tg} 8\alpha, \text{ если } \alpha = \frac{\pi}{48};$$

$$16) \cos^2 4x - \sin 8x \cdot \operatorname{ctg} 2x + \sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x, \text{ если } x = \frac{\pi}{36};$$

$$17) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 54x, \text{ если:}$$

$$\text{а) } \operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$\text{б) } x = \frac{\pi}{27};$$

$$18) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x, \text{ если } x = \frac{\pi}{256}.$$

Решение практикума 10

Вычислите:

$$1) \left[\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) \right]^{-1}, \text{ если } \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\operatorname{ctg} x; \text{ тогда } \operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}, \text{ значит } \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x \right) = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{7};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7.$$

С учетом полученных результатов

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} + x \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) \right]^{-1} &= \left(-\frac{1}{7} - 7 \right)^{-1} = \\ &= -\frac{7}{50} = \boxed{-0,14}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}, \text{ если } \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1 + (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha})^2}{1 - (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha})^2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Значит, } \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} = \boxed{2}.$$

3) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 4\alpha = 0,2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha,\end{aligned}$$

$$\text{так как } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{2} \operatorname{tg} 4\alpha} = \\ &= \frac{4}{\operatorname{tg} 4\alpha} = \frac{4}{0,2} = 20.\end{aligned}$$

Значит, $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \boxed{20}$, если $\operatorname{tg} 4\alpha = 0,2$.

4) $5 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2}$, если $\cos \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{4}{5}$, где $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}5 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} &= 5 \cdot \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{5x}{2}\right) + \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{5x}{2}\right) \right] = \\ &= 2,5(\sin 3x - \sin 2x);\end{aligned}$$

$$\cos \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{4}{5}, \text{ значит } \sin x = \frac{4}{5}, \text{ где } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x; \quad \cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5};$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25};$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1; \quad \cos 2x = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25};$$

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(x + 2x) = \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{72 - 28}{125} = \frac{44}{125}.\end{aligned}$$

Тогда $5 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} = 2,5(\sin 3x - \sin 2x)$, т. е.

$$\begin{aligned} 5 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} &= 2,5 \left(\frac{44}{125} - \frac{24}{25} \right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{44 - 120}{125} = \\ &= -\frac{38}{25} = \boxed{-1,52}. \end{aligned}$$

5) $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если $\sin x + \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ при $-\pi \leq x \leq \pi$.

Так как $\sin x > -\cos x$ и $x \in [-\pi; \pi]$,

то $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \subset [-\pi; \pi]$, значит

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{9} = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2};$$

$$1 + \sin 2x = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2};$$

$$\sin 2x = \frac{4}{9}\sqrt{2}, \text{ но } -\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}.$$

а) $-\frac{\pi}{2} < 2x < 0$; $\cos 2x > 0$;

$$\cos 2x = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{7}{9};$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < 0, \text{ значит } \cos x > 0, \sin x < 0;$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$

$$\sin x = -\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}; \quad \sin x = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3};$$

так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$, то

$$\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{-\frac{1}{3}} = 4 - 3\sqrt{2}.$$

$$\text{б) } 0 < 2x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos 2x > 0; \quad \cos 2x = \frac{7}{9};$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4}, \text{ тогда } \cos x > 0; \quad \sin x > 0, \text{ т. е.}$$

$$\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2}; \quad \sin x = \frac{1}{3}, \text{ тогда}$$

$$\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2} \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{2} - 4.$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{2} < 2x < \pi; \quad \cos 2x < 0;$$

$$\cos 2x = -\frac{7}{9};$$

$$\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}; \quad \cos x > 0; \quad \sin x > 0, \text{ тогда}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}; \quad \sin x = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 1.$$

$$\text{г) } \pi < 2x < \frac{3\pi}{2}, \quad \cos 2x < 0,$$

$$\text{т. е. } \cos 2x = -\frac{7}{9};$$

$$\text{тогда } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}, \text{ значит } \cos x < 0; \quad \sin x > 0;$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}; \quad \cos x = -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = -\frac{1}{3};$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}; \quad \sin x = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{тогда } \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2.$$

д) при $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ $\sin x + \cos x \leq 0$, но
 $\sin x + \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$, что одновременно невозможно,
 значит задача неразрешима.

е) при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$

равенство $\sin x + \cos x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ — не выполняется.

Ответ: а) на $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$ $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4 - 3\sqrt{2}$;
 б) на $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3\sqrt{2} - 4$;
 в) на $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$;
 г) на $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ $\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$.

6) $6(9 \sin 2\alpha + 7 \cos 2\alpha)^{-1}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Так как $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то $\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$;

так как $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то $\cos 2\alpha = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = -\frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} 6 \cdot (9 \sin 2\alpha + 7 \cos 2\alpha)^{-1} &= 6 \cdot \left(9 \cdot \frac{4}{5} - 7 \cdot \frac{3}{5}\right)^{-1} = \\ &= 6 \cdot \left(\frac{36 - 21}{5}\right)^{-1} = 6 \cdot 3^{-1} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$$7) \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = 0,3.$$

Мы уже доказывали ранее, что

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} &= \frac{\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha - 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha} = \\ &= \frac{3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} = 0,3, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = 0,3.$$

$$8) \frac{12 + 16 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Так как } \cos 4\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}, \text{ то } \cos 4\alpha = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5};$$

$$\cos 8\alpha = 2 \cos^2 4\alpha - 1; \quad \cos 8\alpha = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25};$$

$$\begin{aligned} \frac{12 + 16 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha} &= \frac{12 + 16 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{25}}{3 - 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{7}{25}} = \\ &= \frac{12 \cdot 25 + 16 \cdot 20 + 7}{3 \cdot 25 - 4 \cdot 20 + 7} = \frac{300 + 320 + 7}{75 - 80 + 7} = \frac{627}{2} = \boxed{313,5}. \end{aligned}$$

$$9) 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha, \text{ если } \sin 4\alpha = 0,2.$$

Учтем, что из формул тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \text{ и } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

можно получить формулы кубов:

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}; \quad \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = \\
 &= 4 \cdot \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} \cdot \cos 3\alpha + 4 \cdot \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4} \cdot \sin 3\alpha = \\
 &= 3 \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha + \\
 &\quad + 3 \cos \alpha \cdot \sin 3\alpha + \cos 3\alpha \cdot \sin 3\alpha = \\
 &= 3(\sin \alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 3\alpha) = 3 \sin 4\alpha.
 \end{aligned}$$

Значит $A(\alpha) = 3 \sin 4\alpha$, а так как по условию $\sin 4\alpha = 0,2$, то $A(\alpha) = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.

Ответ: $4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = 0,6$.

10) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -\cos 2\alpha, \\
 \text{но } \cos 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда так как } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \text{ то } \cos \alpha = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Значит } \cos 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25} = -0,28,$$

$$\text{так как } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \text{ Итак, } -\cos 2\alpha = \frac{7}{25} = 0,28.$$

$$\text{Ответ: } \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 0,28, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5.$$

11) $3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$ при $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

С учетом условий получим $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, тогда $\cos 2\alpha < 0$, значит

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{120}{169}\right)^2} = -\frac{\sqrt{289 \cdot 49}}{169} = -\frac{17 \cdot 7}{169} = -\frac{119}{169}.$$

$$\cos \alpha > 0, \text{ тогда } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{119}{169}}{2}} = \frac{5}{13};$$

$$\sin \alpha > 0; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ то } 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3 \cdot \frac{\frac{12}{13}}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{3 \cdot 12}{18} = 2.$$

12) $128(\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha)$, если $\sin 2\alpha = 0,5$.

$$\begin{aligned} \text{а) } A(\alpha) &= \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = \\ &= (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2 \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \\ &= \left[(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right]^2 - 2 \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \\ &= (1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)^2 - \frac{1}{8} (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^4 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2\alpha; \end{aligned}$$

б) $\sin 2\alpha = 0,5$, тогда

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (0,5)^2 \right]^2 - \frac{1}{8} \cdot (0,5)^4 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{49}{64} - \frac{1}{128} = \frac{97}{128}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } 128(\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha) = 128 \cdot \frac{97}{128} = 97.$$

Ответ: $128(\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha) = 97$, если $\sin 2\alpha = 0,5$.

$$13) \sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}}} (\sin^{12} \alpha - \cos^{12} \alpha), \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \sin^{12} \alpha - \cos^{12} \alpha = (\sin^4 \alpha)^3 - (\cos^4 \alpha)^3 = \\ &= (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)(\sin^8 \alpha + \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \cos^8 \alpha) = \\ &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times \\ &\quad \times [(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 - 2 \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos 2\alpha \times \\
&\quad \times \left[((\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)^2 - \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha \right] = \\
&= -\cos 2\alpha \cdot [(1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)^2 - \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha] = \\
&= -\cos 2\alpha \times \\
&\quad \times [1 - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha] = \\
&= -\cos 2\alpha [1 - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha] = \\
&= -\cos 2\alpha (1 - \sin^2 2\alpha + \frac{3}{16} \sin^4 2\alpha).
\end{aligned}$$

Учтем, что по условию $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}; \quad \alpha - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$; $2\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= -\cos \frac{7\pi}{6} \left(1 - \sin^2 \frac{7\pi}{6} + \frac{3}{16} \sin^4 \frac{7\pi}{6} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{256} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{256 - 64 + 3}{256} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{195}{256}, \text{ тогда}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}} \cdot A\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \sqrt{\frac{10}{39\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 39 \cdot 5}{2 \cdot 256}} = \sqrt{\frac{5^2}{16^2}} = \boxed{\frac{5}{16}}.$$

$$14) \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}(45^\circ + 4\alpha) \cdot \cos^2(225^\circ - 4\alpha)}, \text{ если } \alpha = 3^\circ.$$

$$A(\alpha) = \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}(45^\circ + 4\alpha) \cdot \cos^2(225^\circ - 4\alpha)} =$$

$$\boxed{\cos^2(225^\circ - 4\alpha) = \cos^2[270^\circ - (45^\circ + 4\alpha)] = \sin^2(45^\circ + 4\alpha)} \quad 3.29$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\cos 8\alpha}{2 \frac{\cos(45^\circ + 4\alpha)}{\sin(45^\circ + 4\alpha)} \cdot \sin^2(45^\circ + 4\alpha)} = \frac{-\cos 8\alpha}{2 \cos(45^\circ + 4\alpha) \cdot \sin(45^\circ + 4\alpha)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\cos 8\alpha}{\sin(90^\circ + 8\alpha)} = \frac{-\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha} = -1.$$

Решение от α (при $\alpha \in D(A)$) не зависит ($3^\circ \in D(A)$).

$$\text{Ответ: } \frac{2 \sin^2 4\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}(45^\circ + 4\alpha) \cdot \cos^2(225^\circ - 4\alpha)} = -1.$$

$$15) \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - 8 \operatorname{tg} 8\alpha, \text{ если } \alpha = \frac{\pi}{48}.$$

$$A(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - 8 \operatorname{tg} 8\alpha.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

$$2 \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 2 \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \right) = 2 \cdot \frac{\cos 4\alpha}{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} = 4 \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

$$\text{Далее по аналогии } 4 \operatorname{ctg} 4\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha = 8 \operatorname{ctg} 8\alpha;$$

$$8 \operatorname{ctg} 8\alpha - 8 \operatorname{tg} 8\alpha = 16 \operatorname{ctg} 16\alpha.$$

$$A\left(\frac{\pi}{48}\right) = 16 \operatorname{ctg}\left(16 \cdot \frac{\pi}{48}\right) = 16 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{16}{3} \sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - 8 \operatorname{tg} 8\alpha = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{48}.$$

$$16) \cos^2 4x - \sin 8x \cdot \operatorname{ctg} 2x + \sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x, \text{ если } x = \frac{\pi}{36}.$$

$$A(x) = \cos^2 4x - \sin 8x \cdot \operatorname{ctg} 2x + \sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x =$$

$$= \cos^2 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 4 \sin^2 2x \cdot \cos^2 2x \cdot \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} =$$

$$= \cos^2 4x - \frac{4 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} + 4 \cos^4 2x =$$

$$= (2 \cos^2 2x - 1)^2 - 4 \cos^2 2x (2 \cos^2 2x - 1) + 4 \cos^4 2x =$$

$$= 4 \cos^4 2x - 4 \cos^2 2x + 1 - 8 \cos^4 2x + 4 \cos^2 2x + 4 \cos^4 2x = 1.$$

$$\text{Ответ: } A(x) = \boxed{1} \text{ и не зависит от } x = \frac{\pi}{36}.$$

17) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 54x$, если:

а) $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{27}$.

а) $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

$$1. \frac{1}{\sin^2 27x} - \frac{\cos 27x}{\sin 27x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

$$\frac{1 - \cos 27x \cdot \sin 27x}{\sin^2 27x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$
 $\sin \frac{x}{2} \neq 0$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} \sin 54x}{\frac{1}{2}(1 - \cos 54x)} = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

$$(2 - \sin 54x)(1 - \cos x) = \sin x(1 - \cos 54x);$$

$$2 - \sin 54x - 2 \cos x + \sin 54x \cdot \cos x = \sin x - \sin x \cdot \cos 54x;$$

$$2(1 - \cos x) - \sin 54x + \sin 54x \cdot \cos x - \sin x = 0;$$

$$2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{109x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{109x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \quad \left(\sin \frac{x}{2} \neq 0 \right);$$

$$2 \sin \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{55x}{2} \cdot \sin \frac{54x}{2} = 0. \text{ Тогда } \frac{\sin \frac{55x}{2} \cdot \sin \frac{54x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1.$$

2. Пусть $A(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 54x$;

$$A(x) = \frac{(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin 54x) \cdot \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \left(\sin \frac{x}{2} \neq 0 \right).$$

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right);$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right);$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 3x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right);$$

$$\dots$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sin 54x = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{107x}{2} - \cos \frac{109x}{2} \right).$$

Поэтому

$$A(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{109x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{55x}{2} \cdot \sin \frac{54x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

б) $x = \frac{\pi}{27}$, тогда $A\left(\frac{\pi}{27}\right) = 0$,

так как $\sin\left(\frac{54}{2} \cdot \frac{\pi}{27}\right) = \sin \pi = 0$.

Ответ: а) $A(x) = 1$, если $\operatorname{ctg}^2 27x - \operatorname{ctg} 27x + 1 = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

б) $A(x) = 0$, если $x = \frac{\pi}{27}$.

18) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x$, если $x = \frac{\pi}{256}$.

$$A(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = (\sin x \neq 0)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x}{\sin x} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{\sin 2^8 x}{\sin x},$$

так как $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

$$A(x) = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{\sin 2^8 x}{\sin x};$$

$$A\left(\frac{\pi}{256}\right) = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{\sin\left(2^8 \cdot \frac{\pi}{256}\right)}{\sin \frac{\pi}{256}} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{\sin \pi}{\sin \frac{\pi}{256}} = 0.$$

Ответ: $A(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^7 x = 0$,

если $x = \frac{\pi}{256}$.

Периодические функции

I. Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической на $D(f)$, если для $\forall x \in D(f)$ $\exists T \neq 0$, называемое ее периодом, такое что 1) $x \pm T \in D(f)$; 2) $f(x+T) = f(x)$.

II. Определение. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T . Основным периодом функции называется число T_0 , наименьшее из всех положительных периодов T .

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = A \sin(ax + b) + B$ периодическая и найдите ее основной период.

$D(f) = (-\infty; \infty)$, для $\forall T \neq 0$ верно, что $x \pm T \in D(f)$, значит первое условие определения периодической функции выполняется.

$$\begin{aligned} & \text{Проверим второе условие. Рассмотрим } f(x+T) - f(x) = \\ &= A \sin(ax + T) + B - (A \sin(ax + b) + B) = \\ &= A \sin(ax + aT + b) - A \sin(ax + b) = \\ &= 2A \sin \frac{ax + aT + b - ax - b}{2} \cdot \cos \frac{ax + aT + b + ax + b}{2} = \\ &= 2A \sin \frac{aT}{2} \cdot \cos \left(ax + b + \frac{aT}{2} \right). \end{aligned}$$

Если $\sin \frac{aT}{2} = 0$, то $\frac{aT}{2} = \pi k$; при $a \neq 0$ $T = \frac{2\pi k}{a}$, и при $k \neq 0$ найден $T \neq 0$, для которого $f(x+T) = f(x)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Значит, функция $y = f(x)$ — периодическая функция.

Так как по определению основного периода $T > 0$ и T_0 — наименьшее из таких T , то очевидно, что $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$ — основной период ($a \neq 0$).

Примечания.

1. Из доказательства периодичность $y = A \sin(ax + b) + B$ не зависит от коэффициентов A , B и b и зависит только от $a \neq 0$.

2. При $a = 0$ $y = A \sin b + B$ — постоянная величина, не зависящая от x , тогда $f(x + T) = f(x)$ для всех T , т. е. в этом случае функция является периодической с периодом T — любым числом, значит в этом случае, так как нет наименьшего положительного числа T_0 , то основного периода нет.

3. Аналогично доказывается, что периодическими являются функции

$$y = A \cos(ax + b) + B - T_0 = \frac{2\pi}{|a|} \quad (a \neq 0);$$

$$y = A \operatorname{tg}(ax + b) + B - T_0 = \frac{\pi}{|a|} \quad (a \neq 0);$$

$$y = A \operatorname{ctg}(ax + b) + B - T_0 = \frac{\pi}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

Пример 2. Проверить периодичность $y = f(x) = \cos x^2$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$, значит первое условие периодичности выполняется.

$$\text{Рассмотрим } f(x + T) - f(x) = \cos(x + T)^2 - \cos x^2 = \\ = -2 \sin \frac{(x + T)^2 - x^2}{2} \cdot \sin \frac{(x + T)^2 + x^2}{2}.$$

а) Если $\sin \frac{(x + T)^2 - x^2}{2} = 0$, то $f(x + T) = f(x)$, значит

$$\frac{(x + T)^2 - x^2}{2} = \pi k; \text{ тогда } xT + \frac{T^2}{2} = \pi k - \text{ получили уравнение относительно } T, \text{ решения которого, конечно, зависят от } x, \text{ что противоречит определению периодичности функции.}$$

б) Если $\sin \frac{(x + T)^2 + x^2}{2} = 0$, то $f(x + T) = f(x)$, значит

$$x^2 + xT + \frac{T^2}{2} = \pi k - \text{ но решения этого уравнения также зависят от } x.$$

Итак, равенство $f(x + T) = f(x)$ для $\forall x \in D(f)$ не выполняется ни для какого T , следовательно, функция $y = \cos x^2$ — непериодическая.

Пример 3. Выясните периодичность функции $y = \cos^2 3x$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполняется.

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}, \text{ т. е. } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x,$$

а это функция вида $y = A \cos(ax + b) + B$, значит, она периодическая с основным периодом $T_0 = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3}$ ($a = 6$).

Пример 4. Выясните периодичность $y = f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \cdot \operatorname{ctg} x$.

$$D(f): \begin{cases} \sin x \neq 1; \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x \neq \pi n \end{cases} \quad |k, n \in \mathbb{Z}.$$

На $D(f)$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$,

эта функция имеет вид $y = A \operatorname{ctg}(ax + b) + B$, а значит периодическая с периодом $T = \frac{\pi k}{a}$ ($a \neq 0$) и основным периодом

$T_0 = \frac{\pi}{|a|}$. Так как в данном случае $a = 1$, то основным периодом должно быть $T_0 = \pi$.

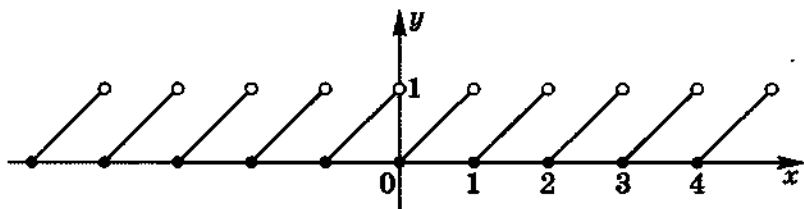
Но в случае $T_0 = \pi$ не выполняется условие на область определения, так как $x = -\frac{\pi}{2} \in D(f)$, но $x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \notin D(f)$, т. е. не выполняется условие периодичности.

значит $D(f)$ — несимметричное множество.

Значит, $y = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \cdot \operatorname{ctg} x$ — непериодическая функция.

Пример 5. Может ли функция быть периодической, не являясь тригонометрической?

Рассмотрим $y = \{x\}$ — функция дробной части числа (ее график представлен на чертеже).



Очевидно, что $D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполнено. Также очевидно, что $\{x+T\} = \{x\}$ при любом целом T (дробная часть числа при прибавлении T остается той же).

Значит, $y = \{x\}$ — периодическая, а $T_0 = 1$ (наименьшее положительное целое число).

Ответ: да¹.

Пример 6. Может ли функция, не являясь постоянной, быть периодической и не иметь основного периода?

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

$D(D) = (-\infty; \infty)$ — первое условие выполнено.

Проверим второе условие.

- а) Так как сумма двух рациональных чисел есть рациональное число, то если x рациональное, то для любого рационального T $D(x+T) = D(x) = 1$.
- б) Известно, что сумма иррационального числа и рационального числа есть число иррациональное, значит если x иррациональное число, то для любого рационального T $x+T$ — иррациональное, и $D(x+T) = D(x) = 0$.

Итак, для любого x и для любого рационального T выполняется равенство $D(x+T) = D(x)$. По определению D — периодическая функция.

Основного периода эта функция не имеет, так как не существует наименьшего положительного рационального числа.

Примечание. Рациональным числом называется бесконечная периодическая десятичная дробь. Можно доказать, что ее можно представить в виде обыкновенной дроби вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.

¹ Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2008. С. 92.

Отметим ряд свойств периодической функции.

1. Область определения периодической функции есть бесконечное множество.
2. Периодическая функция не может иметь конечного числа точек разрыва.
3. Периодическая функция не может быть строго монотонной на всей своей области определения.
4. Непрерывная и неограниченная на всей числовой оси функция не может быть периодической.
5. Сложная функция, промежуточный аргумент которой периодическая функция, также является периодической функцией.
6. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ периодические, то их алгебраическая сумма, произведение и частное — также периодические функции, если их основные периоды соизмеримы. Для их алгебраической суммы основной период есть наименьшее общее кратное основных периодов $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 7. Найдите основной период функции

$$y(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{2}\pi x) + \sin(\pi x).$$

$$y = f_1(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{2}\pi x) - \text{периодическая,}$$

$$(T_0)_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(T_0 = \frac{\pi}{|a|}\right);$$

$$y = f_2(x) = \sin(\pi x) - \text{периодическая,}$$

$$(T_0)_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{|a|}\right).$$

Числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 2 несоизмеримы,

значит функция $y = \operatorname{tg}(\sqrt{2}\pi x) + \sin(\pi x)$ — непериодическая.

Примечание. Соизмеримость чисел T_1 и T_2 означает, что $\frac{T_1}{T_2}$ — рациональное число (т. е. число вида $\frac{p}{q}$, где $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$).

Пример 8. Найдите период функции $y(x) = \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{5}$.

Как мы уже знаем,

$$y_1 = f_1(x) = \cos \frac{x}{3} \text{ — периодическая, } (T_0)_1 = 6\pi \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{|a|}\right);$$

$$y_2 = f_2(x) = \cos \frac{x}{4} \text{ — периодическая, } (T_0)_2 = 8\pi;$$

$$y_3 = f_3(x) = \sin \frac{x}{5} \text{ — периодическая, } (T_0)_3 = 10\pi.$$

Очевидно, числа 6π , 8π и 10π соизмеримы, значит

$y(x) = \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{5}$ — периодическая функция, а ее основной период равен $T_0 = \text{Н. О. К. } (6\pi; 8\pi; 10\pi) = 120\pi$.

Пример 9. Найдите основной период функции

$$y = \cos^2 x + \cos^2(1+x) - 2 \cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) - \frac{1}{2}.$$

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — первое условие периодичности выполнено.

Проверим второе условие.

$$\text{а) } 2 \cos 1 \cdot \cos x = \cos(1+x) + \cos(1-x);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } -2 \cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) &= \\ &= -\cos^2(1+x) - \cos(1-x) \cdot \cos(1+x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \cos^2(1+x) - 2 \cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) &= \\ &= -\cos(1-x) \cdot \cos(1+x) = -\frac{1}{2}(\cos 2 + \cos 2x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos^2 x + \cos^2(1+x) - 2 \cos 1 \cdot \cos x \cdot \cos(1+x) - \frac{1}{2} &= \\ &= \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2 - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \cos 2. \end{aligned}$$

Так как $y = -\frac{1}{2} \cos 2$ — число, не зависящее от x ,

то $f(x + T) = -\frac{1}{2} \cos 2 = f(x)$ при любом $T \neq 0$,

т. е. $y(x)$ — периодическая.

- д) Основного периода функция не имеет, так как нет наименьшего положительного числа.

Примечание. Используя свойства, можно доказать, что следующие функции не являются периодическими:

$y = \log_2 x$ — не выполняется свойство 3 (функция строго монотонная);

$y = x^2 \sin x$ — свойство 4 (функция не ограниченная);

$y = \frac{\sin x}{x^2 - 1}$ — свойство 2 (имеет конечное число разрывов);

$y = \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^4 + 3x^2 - 4}}{\sin x}$ — свойство 1 ($D(f) = \{-1; 1\}$);

$y = \sin x \cdot \sin(\sqrt{2}x)$ — свойство 6 (основные периоды функций-сомножителей несоизмеримы);

$y = \sin(2^x)$ — свойство 5 (промежуточная функция $t(x) = 2^x$ не является периодической).

Практикум 11 (Продолжение рассмотрения более сложных примеров)

1. Вычислите:

- 1) $(\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ)(\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ)^{-1} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ};$
- 2) $\frac{\operatorname{tg} 3}{\operatorname{tg} 1} - \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1};$
- 3) $4 \cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33};$
- 4) $\sqrt{3}(\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ);$
- 5) $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ;$
- 6) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10};$
- 7) $(\sqrt{3} - 1) \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4};$
- 8) $\operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ;$
- 9) $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9};$
- 10) $\sqrt{5} \left(3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{6} \right).$

2. Докажите неравенства:

- 1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника;
- 2) $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, где α, β, γ — углы треугольника;
- 3) $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах);
- 4) $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin \alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

3. Определите периодичность функций и основной период:

1) $y = \frac{1}{2 + \cos 3x}$;

2) $y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$;

3) $y = \cos x \cdot \cos(\sqrt{2}x)$;

4) $y = 3x + \sin 2x$;

5) $y = \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$;

6) $y = \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$;

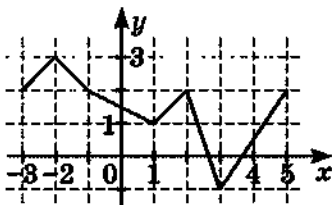
7) $y = 3^{\sin \frac{x}{2}} + 2^{\lg \frac{x}{3}}$;

8) $y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x}$;

9) $y = \sin^2(\cos 2x)$;

10) $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin \sqrt{x}$.

4. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 8. График функции на отрезке $[-3; 5]$ изображен на рисунке. Найдите значение выражения $\frac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)}$.



Решение практикума 11

1. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1) & (\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ) (\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ)^{-1} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ} \left(\frac{\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \right)^{-1} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ (\sin 40^\circ - 1)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} 3}{\operatorname{tg} 1} - \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1}.$$

Похоже, здесь необходимо знать $\operatorname{tg} 3\alpha$. Выведем тангенс тройного угла:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} 3\alpha &= \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Тогда, полагая $\alpha = 1$, получим

$$\operatorname{tg} 3 = \operatorname{tg} 1 \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1}.$$

$$\text{Значит } \frac{\operatorname{tg} 3}{\operatorname{tg} 1} - \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1} - \frac{3 - \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1} = \boxed{0}.$$

$$\begin{aligned}
 3) & 4 \cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33} = \\
 &= \frac{4 \sin \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
 &= \frac{2 \sin \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{2\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{4\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{8\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{16\pi}{33} \cdot \cos \frac{16\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \frac{32\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{33} \right)}{\sin \frac{\pi}{33}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{33}}{\sin \frac{\pi}{33}} = \boxed{\frac{1}{8}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad &\sqrt{3}(\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ) = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3} \cdot \frac{2 \sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ.$$

Чтобы вычислять далее, необходимо знать значение $\sin 18^\circ$.

$$\text{Так как } \cos 36^\circ = \sin 54^\circ, \quad 1 - 2 \sin^2 18^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ);$$

$$\text{Учтем, что } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$1 - 2 \sin^2 18^\circ = 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ.$$

$$\text{Пусть } \sin 18^\circ = t.$$

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0;$$

очевидно, что $t = 1$ — корень, тогда

$$\begin{array}{r}
 - \frac{4t^3 - 2t^2 - 3t + 1}{4t^3 - 4t^2} \Bigg| \frac{t-1}{4t^2 + 2t - 1} \\
 - \frac{2t^2 - 3t + 1}{2t^2 - 2t} \\
 - \frac{t+1}{t+1}
 \end{array}$$

Но $\sin 18^\circ \neq 1$, значит $4t^2 + 2t - 1 = 0$;

$$\begin{cases} t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0 \end{cases}$$

Очевидно, $\sin 18^\circ > 0$, таким образом $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \cos 36^\circ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \\
 &= \frac{8 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}{8} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Значит } \sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ &= \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{5-1}{4 \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$6) \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{10} + \frac{13\pi}{10}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{13\pi}{10} - \frac{\pi}{10}}{2} = 2 \sin \frac{7\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} = \\
 &= 2 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10}} = \\
 &= \frac{\sin \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{6\pi}{5}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) (\sqrt{3} - 1) \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4} &= \\ &= (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ &= (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{3 - 1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$8) \operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} \sin 80^\circ (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ - \frac{1}{4} \sin 80^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\sin 80^\circ + \sin 60^\circ) - \frac{1}{4} \sin 80^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \\ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}^2 20^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 40^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 80^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boxed{3}.$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = \\
 & = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} + 2 \sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} + 2 \sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{8\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9}} = \\
 & = \frac{\sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{6\pi}{9} - \sin \frac{6\pi}{9} + \sin \frac{10\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9}} = \\
 & = \frac{\sin \frac{4\pi}{9} + 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{6\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9}}{2 \sin \frac{2\pi}{9}} = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

$$10) \quad \sqrt{5} \left(3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Учтем, что $\sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (см. пример 4).

$$\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } & \sqrt{5} \left(3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\
 & = \sqrt{5} \left(3 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \\
 & = \sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}-3+\sqrt{5}+1+2}{4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \boxed{5}.
 \end{aligned}$$

2. Докажите неравенства:

- 1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника.

$$L = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma.$$

а) Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$,

$$\text{поэтому } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \sin \frac{\gamma}{2}.$$

б) Очевидно, что $0 \leq \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$.

$$\text{Значит } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Тогда } 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma \leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma.$$

в) Преобразуем выражение $2 \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma =$

$$= 2 \sin \frac{\gamma}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = -2 \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -2 \left(\left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right) = -2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{так как } -2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq 0 \text{ для } \forall \gamma.$$

г) Теперь можно выстроить логическую цепочку:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma \leq$$

$$\leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma = -2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ для } \forall x,$$

т. е. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$, что и требовалось доказать.

2) $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, где α, β, γ — углы треугольника.

$$\text{а) } L = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \cdot \sin \frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} + \sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} - \right. \\ \left. - \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \right].$$

б) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ по условию, поэтому

$$\alpha - \beta + \gamma = 180^\circ - 2\beta;$$

$$-\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ - 2\alpha;$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 180^\circ - 2\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} = \sin \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta;$$

$$\sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} = \sin \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \sin \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma;$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \sin \frac{180^\circ}{2} = \sin 90^\circ = 1.$$

в) Тогда $L = \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1)$,

но $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$ (см. выше, пример 1).

Значит $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 \leq \frac{1}{2}$.

Домножаем на $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1) \leq \frac{1}{8},$$

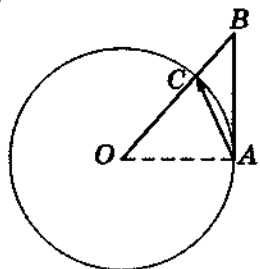
$$\text{т. е. } L = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1) \leq \frac{1}{8}.$$

Отсюда следует, что $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, если α , β и γ — углы треугольника, что и требовалось доказать.

- 3) $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

Для доказательства используем геометрические соображения. Рассмотрим окружность R и треугольник $\triangle OAB$, где $\angle BOA = \alpha$ ($OA \perp AB$).



Очевидно, что $S_{\triangle OAC} < S_{\text{сект. } OAC} < S_{\triangle OAB}$.

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} OA^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha; \quad S_{\text{сект. } OAC} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha;$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} OA \cdot OA \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha < \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha < \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что и требовалось доказать.

- 4) $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin \alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (α — угол в радианах).

Так как $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$ (см. пример 3), то $\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Домножим на } \cos^2 \frac{\alpha}{2}: \quad \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} < \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) < 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \alpha \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) < \sin \alpha.$$

Так как $\sin \alpha < \alpha$ (см. пример 3), то $\sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$;

$$\text{Тогда } \sin^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{4}, \text{ значит } -\sin^2 \frac{\alpha}{2} > -\frac{\alpha^2}{4};$$

$$1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Домножим на $\alpha > 0$: $\alpha \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) > \alpha - \frac{\alpha^3}{4}$.

Учитывая, что $\alpha \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) < \sin \alpha < \alpha$, получим $\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \sin \alpha < \alpha$, что и требовалось доказать.

Примечание. Это двойное неравенство можно использовать для приближенного вычисления $\sin \alpha$ с любой степенью точности, так как α — радианное измерение угла.

3. Определите периодичность функций и основной период:

$$1) y = \frac{1}{2 + \cos 3x}.$$

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f(x+T) - f(x) &= \frac{1}{2 + \cos 3(x+T)} - \frac{1}{2 + \cos 3x} = \\ &= \frac{2 + \cos 3x - 2 - \cos 3(x+T)}{(2 + \cos 3(x+T))(2 + \cos 3x)} = \\ &= \frac{\cos 3x - \cos 3(x+T)}{(2 + \cos 3(x+T))(2 + \cos 3x)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3x+3T-3x}{2} \cdot \sin \frac{3x+3T+3x}{2}}{(2 + \cos 3(x+T))(2 + \cos 3x)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3T}{2} \cdot \sin \left(3x + \frac{3T}{2}\right)}{(2 + \cos 3(x+T))(2 + \cos 3x)}. \end{aligned}$$

$$\text{При } \sin \frac{3T}{2} = 0 \quad T = \frac{2\pi k}{3},$$

т.е. если $T = \frac{2\pi k}{3}$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0$, то $f(x+T) = f(x)$,

значит $y = \frac{1}{2 + \cos 3x}$ периодическая, и $T_0 = \frac{2\pi}{3}$ — основной период.

$$2) y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}.$$

$D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

а) Пусть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ (симметричное множество). Тогда рассмотрим определенную на этом множестве функцию $f_1(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg}^2 x + 1}$ — сложная функция от $\operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом $T_0 = \pi$. По свойству 5 из этого следует, что и $f_1(x)$ — периодическая функция.

б) Вернемся к $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$.

При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $f(x)$ равна нулю;

при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $f(x) = f_1(x)$.

Таким образом, $y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$ — периодическая функция с основным периодом $T_0 = \pi$ на $(-\infty; \infty)$.

в) Можно доказать, что $T_0 = \pi$ — основной период.

Для этого преобразуем $y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} = \frac{2 \sin 2x}{3 - \cos 2x}$.

Из $\frac{2 \sin 2(x+T)}{3 - \cos 2(x+T)} = \frac{2 \sin 2x}{3 - \cos 2x}$ после преобразований следует $T = \pi k$, и $T_0 = \pi$.

$$3) y = \cos x \cdot \cos(\sqrt{2}x).$$

Так как $y = \cos x$ — периодическая ($T_0 = 2\pi$) и $y = \cos \sqrt{2}x$ — периодическая ($T_0 = \sqrt{2}\pi$), и их периоды несоизмеримы, то по свойству 6 их произведение есть непериодическая функция.

4) $y = 3x + \sin 2x$.

Можно доказать, что

$y = 3x + \sin 2x \uparrow (y' = 3 + 2 \cos 2x > 0)$, тогда по свойству 3 функция периодической не является.

5) $y = \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} [\cos x - \cos 5x] \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} \cos x \cdot \cos 5x - \frac{1}{2} \cos^2 5x = \\ &= \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 10x. \end{aligned}$$

Так как для $A \cos(ax+b) + B$ основной период $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$, то:

$$y_1 = \cos 6x \text{ — периодическая, } (T_0)_1 = \frac{\pi}{3};$$

$$y_2 = \cos 4x \text{ — периодическая, } (T_0)_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$y_3 = \cos 10x \text{ — периодическая, } (T_0)_3 = \frac{\pi}{5}.$$

Очевидно, что наименьшим общим кратным этих основных периодов является число π , следовательно, в силу свойства 6 для исходной функции $T_0 = \pi$.

6) $y = \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$.

$D(f) : \sin 2x \neq 0; \quad x \neq \left\{ \frac{\pi}{2} k \right\}$ — симметричное множество ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \sin^2 2x}{2 \sin 2x} - \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + 1 = \\ &= \sin 2x - 1 - \sin 2x + 1 = 0 \text{ на } D(f). \end{aligned}$$

Итак, $y = \frac{1 - \cos 4x}{2 \sin 2x} - (\sin x + \cos x)^2 + 1$ при $x \neq \frac{\pi}{2} k$ — постоянная, и $f(x+T) = f(x) = 0$.

Поэтому функция — периодическая с периодом, который находится только из условия на $D(f)$ — $T = \frac{\pi}{2}k$, и основной период $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$7) y = 3^{\sin \frac{x}{2}} + 2^{\lg \frac{x}{3}}.$$

а) Рассмотрим $y_1 = 3^{\sin \frac{x}{2}}$. Это сложная функция.

По свойству 5, учитывая периодичность $t = \sin \frac{x}{2}$, заключаем, что y_1 — периодическая функция.

Так как показательная функция $y_1 = 3^t$ — строго монотонная, то каждое свое значение она принимает только один раз. Значит, функция $y_1 = \sin \frac{x}{2}$ имеет основной период, совпадающий с основным периодом $t = \sin \frac{x}{2}$.

Основной период функций вида $y = A \sin(ax+b) + B$ (см. пример 1) равен $\frac{2\pi}{a}$.

Значит, для $t = \sin \frac{x}{2}$ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

б) Аналогично рассуждая, получим, что функция

$y_2 = 2^{\lg \frac{x}{3}}$ — периодическая с основным периодом $T_2 = 3\pi$ (для функций вида $y = A \lg(ax+b) + B$ основной период равен $\frac{\pi}{a}$ — см. примечание к примеру 1).

в) По свойству 6 $y = 3^{\sin \frac{x}{2}} + 2^{\lg \frac{x}{3}}$ — периодическая. Основной период ее равен $T_0 = \text{Н.О.К.}(T_1; T_2)$.

Таким образом, $T_0 = \text{Н.О.К.}(4\pi; 3\pi) = \boxed{12\pi}$.

$$8) y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x};$$

а) Пусть $y_1 = \sin 9x$. Очевидно, что это периодическая функция, основной период которой равен $T_1 = \frac{2\pi}{9}$.

б) Пусть $y_2 = \sin 3x$. Тогда $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

в) Так как $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3}$ (рациональное число), значит основные периоды y_1 и y_2 соизмеримы.

По свойству 6 исходная функция — периодическая.

г) Для нахождения основного периода $y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x}$ используем формулу тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$$

$$y = \frac{\sin 9x}{\sin 3x} = \frac{3\sin 3x - 4\sin^3 3x}{\sin 3x} = 3 - 4\sin^2 3x.$$

При $\sin 3x \neq 0$; $x \neq \frac{\pi}{3}k | k \in \mathbb{Z}$ $y = 3 - 4\sin^2 3x$ — периодическая.

$$y = 3 - 4\sin^2 3x = 3 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 + 2\cos 6x.$$

Получили функцию вида $y = A \cos(ax + b) + B$.

$$\text{Значит, } T_0 = \frac{2\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3}}.$$

9) $y = \sin^2(\cos 2x)$;

а) $t = \cos 2x$ — периодическая с основным периодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi. \text{ По свойству 5 сложная функция}$$

$y = \sin(\cos 2x)$ — периодическая.

б) $y = \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$.

Для $y = \sin t$ основной период $T_2 = 2\pi$.

Для $y = \cos 2t$ основной период $T_3 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Значит, для $y = \sin^2 t$ основной период в два раза меньше, чем для $y = \sin t$.

в) $y = \sin(\cos 2x)$ — периодическая.

$t = \cos 2x$ имеет основной период $T_1 = \pi$, тогда

$$y = \sin(\cos 2(x + \pi)) = \sin(\cos(2x + 2\pi)) = \sin(\cos 2x).$$

Таким образом, $T_1 = \pi$ — основной период и для функции $y = \sin(\cos 2x)$.

- г) Так как для $y = \sin^2(\cos 2x)$ основной период в два раза меньше основного периода $y = \sin(\cos 2x)$, то основной период для $y = \sin^2(\cos 2x)$ равен $T_0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

10) $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin \sqrt{x}$.

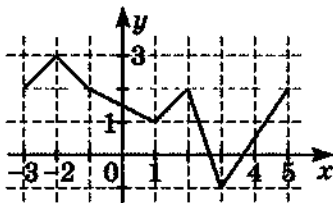
- а) $y_1 = \sqrt{\sin x}$ — периодическая по свойству 5.

- б) $y_2 = \sin \sqrt{x}$ — не периодическая, так как $t = \sqrt{x}$ — промежуточная не периодическая функция. Значит, свойство 5 не выполняется.

Можно использовать для доказательства неперiodичности идеи примера 2 со страницы 264.

- в) Значит, условия свойства 6 для $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin \sqrt{x}$ не выполняются, и $y = \sqrt{\sin x} \cdot \sin \sqrt{x}$ — не периодическая функция.

4. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 8. График функции на отрезке $[-3; 5]$ изображен на рисунке. Найдите значение выражения $\frac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)}$.



Из графика определим значения функции:

$$f(-10) = f(-10 + 8) = f(-2) = 3;$$

$$f(-4) = f(-4 + 8) = f(4) = 0,5;$$

$$f(28) = f(28 - 3 \cdot 8) = f(4) = 0,5, \text{ значит}$$

$$\frac{f(-10) \cdot f(-4)}{f(28)} = \frac{f(-2) \cdot f(4)}{f(4)} = \boxed{3}.$$

6

Обратные тригонометрические функции и их графики

Напомним некоторые теоретические положения.

Пусть $f(x)$ строго монотонная. Тогда каждое свое значение она принимает только один раз.

Обозначим $A = D(f)$ (область определения функции $f(x)$), $B = E(f)$ (область значений функции $f(x)$).

Для такой функции каждому значению из B можно сопоставить вполне определенное значение из A , т.е. установить функциональное соответствие между B и A , обратное функциональному соответствию f .

Итак, чтобы найти функцию, обратную монотонной функции $y = f(x)$, нужно поменять местами буквы x и y , написав $x = f(y)$ и найдя из полученного равенства y как из уравнения. Это и определит обратную функцию $y = g(x)$.

Свойства обратных функций

Если $y = f(x)$ — строго монотонная и $y = g(x)$ — обратная ей функция, то они имеют следующие свойства.

1. Функция $y = g(x)$ — также строго монотонная, причем характер монотонности сохраняется (если $y = f(x) \uparrow$, то $y = g(x) \uparrow$; если $y = f(x) \downarrow$, то $y = g(x) \downarrow$).
2. При переходе от функции $y = f(x)$ к обратной ей функции $y = g(x)$ области их определения и области их значений меняются местами, т.е. $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$.

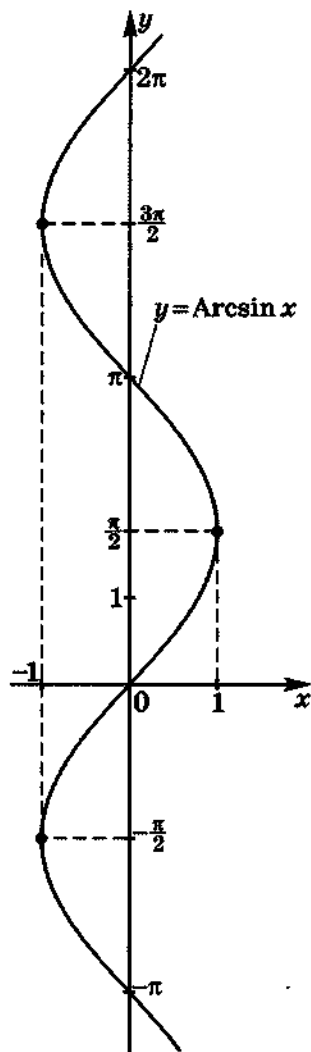
3. Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов — прямой $y = x$.
4. Для любого $x \in D(f)$ (принадлежащего области определения $y = f(x)$) справедливо соотношение $g(f(x)) = x$; и наоборот, для любого $x \in D(g)$ справедливо соотношение $f(g(x)) = x$.

Арксинус

Рассмотрим функцию $y = \sin x$. $D(f) = (-\infty; \infty)$, на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \operatorname{Arcsin} x$ функцией не является.

Пусть $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $y = \sin x$ строго монотонно возрастает и пробегает все значения из области значений синуса $([-1; 1])$ только один раз, значит, для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует обратная, которая обозначается $y = \arcsin x$, график которой симметричен графику

функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y = x$.

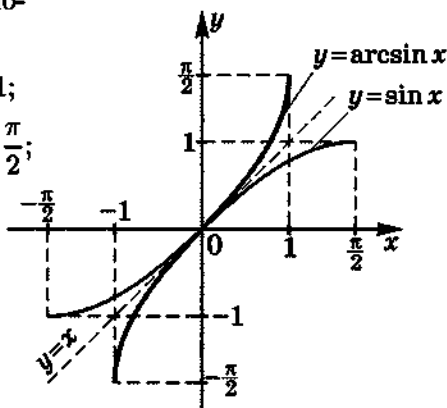


Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arcsin(\sin y) = y; \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

Итак, подведем итоги:



1. $y = \arcsin x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности и ограниченности $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).
2. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$, т.е. $-1 \leq x \leq 1$.
3. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, т.е. $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
4. $y = \arcsin x$ является нечетной функцией: $D(\arcsin x)$ — симметричное множество, и $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
5. $\arcsin x > 0$ при $0 < x \leq 1$;
 $\arcsin x = 0$ при $x = 0$;
 $\arcsin x < 0$ при $-1 \leq x < 0$.
6. Функция $y = \arcsin x$ является строго возрастающей, т.е. из $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq -1$ следует $\arcsin x_1 \geq \arcsin x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).
7. $y_{\text{наиб}} = y(1) = \frac{\pi}{2}$; $y_{\text{наим}} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
8. $\arcsin \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -1$ (выпуклость вверх);
 $\arcsin \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2}$ при $1 > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вниз).

Арккосинус

Рассмотрим функцию $y = \cos x$.

$D(f) = (-\infty; \infty)$, на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \text{Arccos } x$ функцией не является.

Пусть $x \in [0; \pi]$. На этом отрезке $y = \cos x$ строго монотонно убывает и пробегает все значения из области значений косинуса $([-1; 1])$ только один раз, значит, для функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ существует обратная, которая обозначается $y = \arccos x$, график которой симметричен графику функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$.

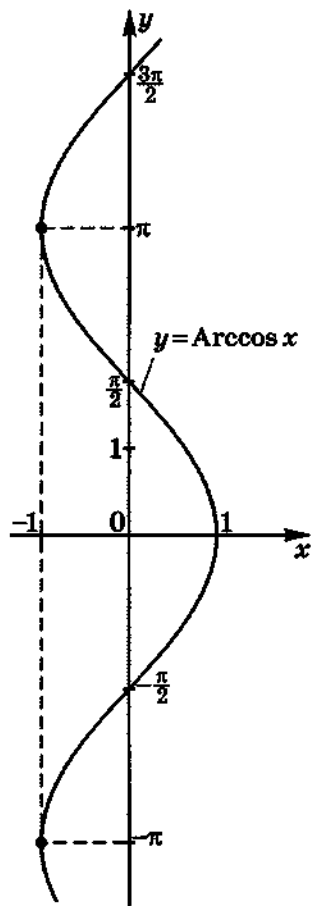
Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

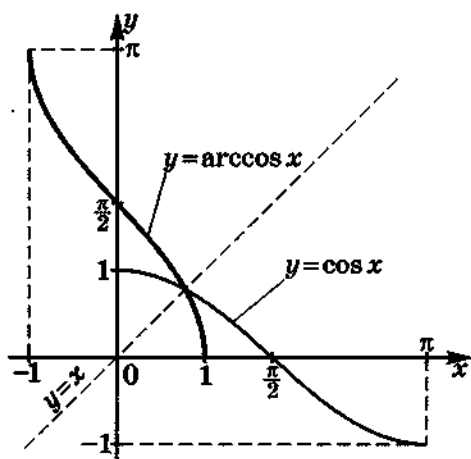
$$\cos(\arccos x) = x; \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arccos(\cos y) = y; \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Итак, подведем итоги:

1. $y = \arccos x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности и ограниченности $y = \cos x$ на $[0; \pi]$).
2. $D(\arccos x) = [-1; 1]$, т.е. $-1 \leq x \leq 1$.
3. $E(\arccos x) = [0; \pi]$, т.е. $0 \leq y \leq \pi$.
4. $y = \arccos x$ — функция общего вида в смысле четности, но ее график является центрально-симметричным относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos(-x) - \frac{\pi}{2}$, значит $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.





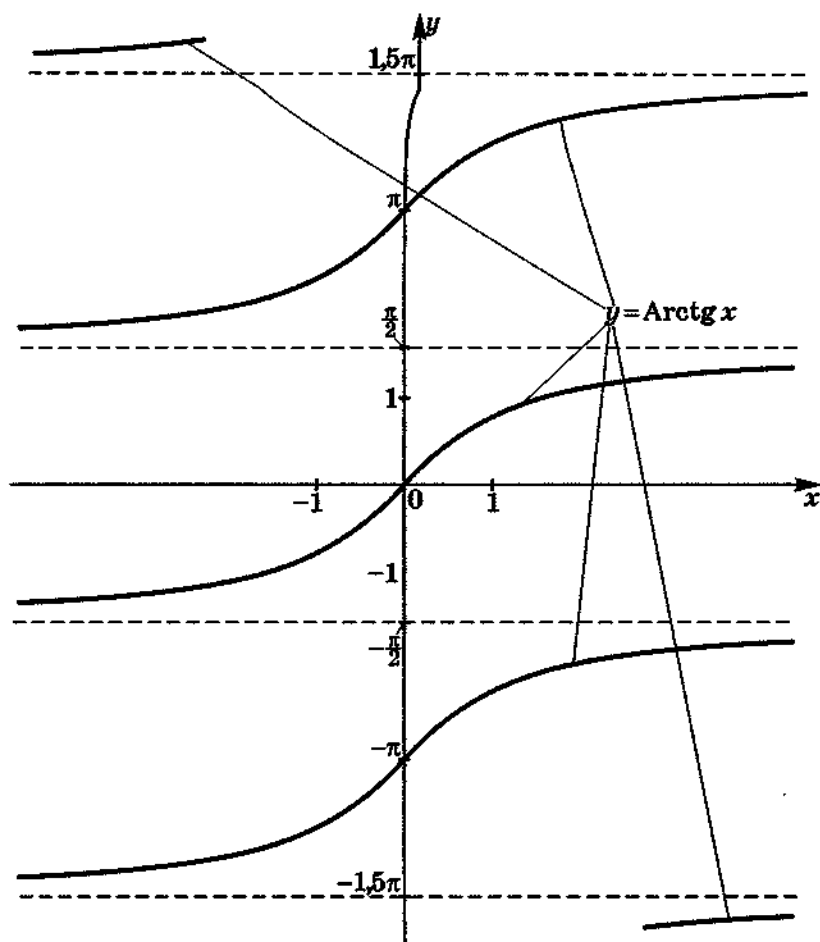
5. $\arccos x > 0$ при $-1 \leq x < 1$;
 $\arccos x = 0$ при $x = 1$.
6. Функция $y = \arccos x$ является строго убывающей,
 т.е. из $1 \geq x_1 > x_2 \geq -1$ следует $\arccos x_1 < \arccos x_2$
 (в силу строгой монотонности $y = \cos x$ на $[0; \pi]$).
7. $y_{\text{наиб}} = y(-1) = \pi$; $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$.
8. $\arccos \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -1$
 (выпуклость вниз);
 $\arccos \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\arccos x_1 + \arccos x_2}{2}$ при $1 > x_1 > x_2 > 0$
 (выпуклость вверх).

Арктангенс

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$.

$D(f): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \operatorname{Arctg} x$ функцией не является.

Пусть $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом отрезке $y = \operatorname{tg} x$ строго монотонно возрастает и пробегает все значения из области значе-

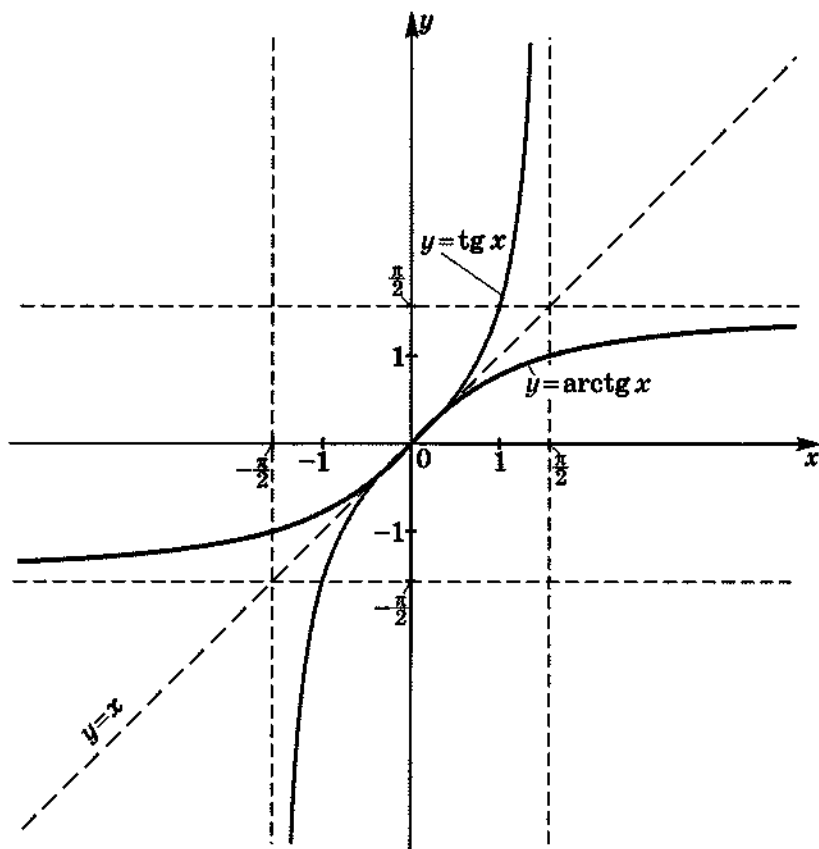


ний тангенса $(-\infty; \infty)$ только один раз, значит, для функции $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует обратная, которая обозначается $y = \operatorname{arctg} x$, график которой симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ относительно прямой $y = x$.

Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y; \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$



Итак, подведем итоги:

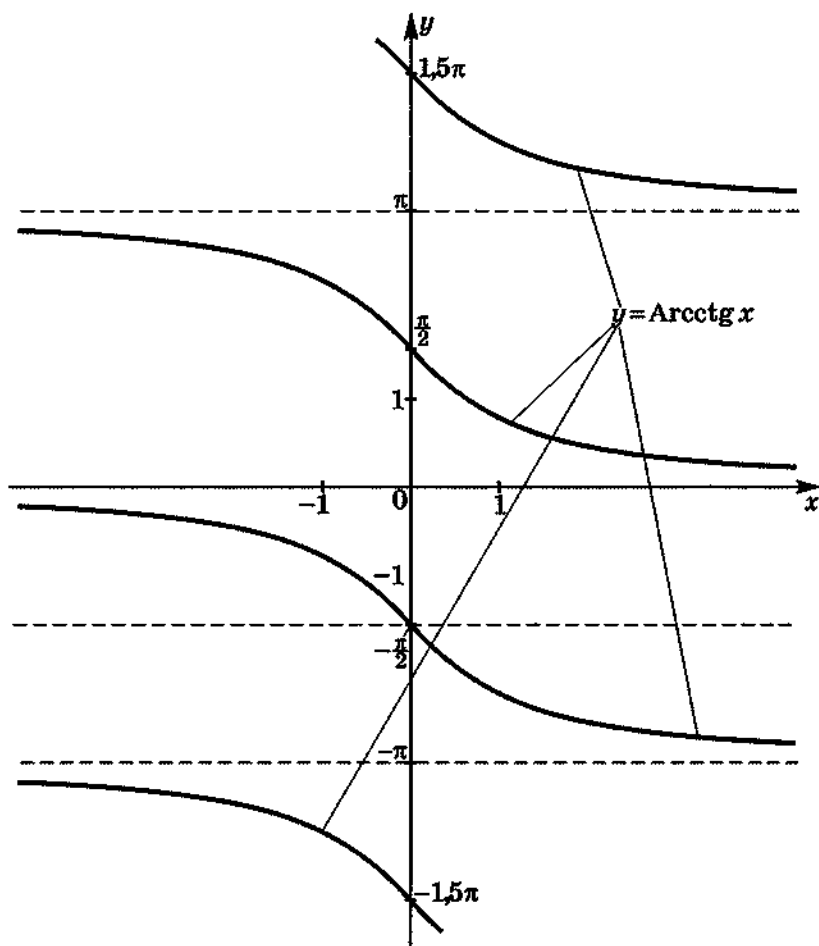
1. $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).
2. $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; \infty)$.
3. $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. $y = \operatorname{arctg} x$ — нечетная функция, так как $D(\operatorname{arctg} x)$ — симметричное множество, и $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
5. $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x > 0$;
 $\operatorname{arctg} x = 0$ при $x = 0$;
 $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x < 0$.
6. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является строго возрастающей, т. е. из $x_1 > x_2$ следует $\operatorname{arctg} x_1 > \operatorname{arctg} x_2$
(в силу строгой монотонности $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).
7. Наибольшего и наименьшего значения нет.
8. $\operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -\infty$
(выпуклость вниз);
 $\operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2}{2}$ при $\infty > x_1 > x_2 > 0$
(выпуклость вверх).

Арккотангенс

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$.

$D(f) : x \neq \pi k$, т.е. на своей области определения она является кусочно-монотонной, но не монотонной, а значит обратное соответствие $y = \operatorname{Arccctg} x$ функцией не является.

Пусть $x \in (0; \pi)$. На этом отрезке $y = \operatorname{ctg} x$ строго монотонно убывает и пробегает все значения из области значений котангенса $(-\infty; \infty)$ только один раз, значит, для функ-

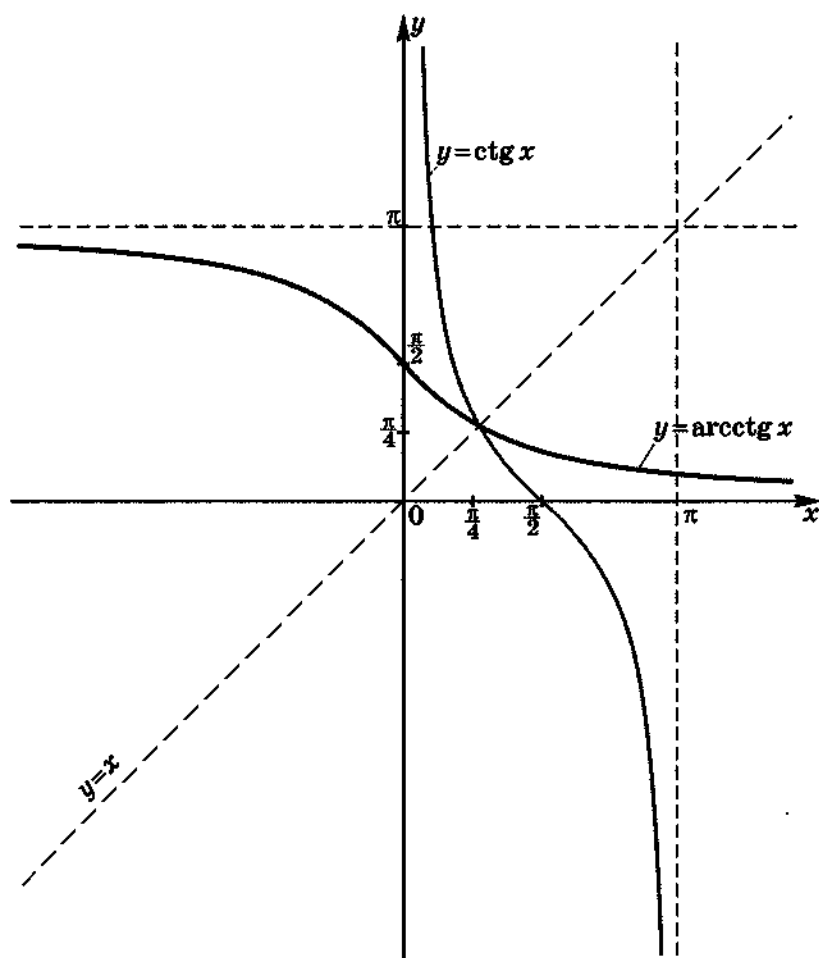


ции $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$ существует обратная, которая обозначается $y = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x$, график которой симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ на отрезке $(0; \pi)$ относительно прямой $y = x$.

Учитывая свойство взаимно-обратных функций, имеем

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x) = x; \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} y) = y; \quad 0 < y < \pi.$$



Итак, подведем итоги:

1. $y = \operatorname{arccctg} x$ непрерывна и ограничена (в силу непрерывности $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$).
2. $D(\operatorname{arccctg} x) = (-\infty; \infty)$.
3. $E(\operatorname{arccctg} x) = (0; \pi)$.
4. $y = \operatorname{arccctg} x$ — функция общего вида в смысле четности, но ее график центрально-симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x = \operatorname{arccctg}(-x) - \frac{\pi}{2}$.
Значит $\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x$.
5. $\operatorname{arccctg} x > 0 \quad \forall x \in (-\infty; \infty)$.
6. Функция $y = \operatorname{arccctg} x$ является строго убывающей, т. е. из $x_1 > x_2$ следует $\operatorname{arccctg} x_1 < \operatorname{arccctg} x_2$ (в силу строгой монотонности $y = \operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$).
7. Наибольшего и наименьшего значения нет.
8. $\operatorname{arccctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arccctg} x_1 + \operatorname{arccctg} x_2}{2}$ при $0 > x_1 > x_2 > -\infty$ (выпуклость вверх);
 $\operatorname{arccctg} \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\operatorname{arccctg} x_1 + \operatorname{arccctg} x_2}{2}$ при $\infty > x_1 > x_2 > 0$ (выпуклость вниз).

Практикум 12Установите $D(y)$:

$$1) y = \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\log_2(1-3x)};$$

$$2) y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\arccos(x-1)};$$

$$3) y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\arcsin(x-1)};$$

$$4) y = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(4-x^2)}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}};$$

$$5) y = \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot \log_3(6+x-x^2)}{\operatorname{arctg}(2x^2-3x+1)};$$

$$6) y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$$

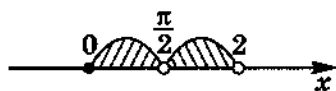
Решение практикума 12Установите $D(y)$:

$$1) y = \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\log_2(1-3x)}.$$

$$\begin{cases} 0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1-3x > 0 \\ 1-3x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x < \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(y) = \left(0; \frac{1}{3}\right).$$

$$2) y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\arccos(x-1)}.$$

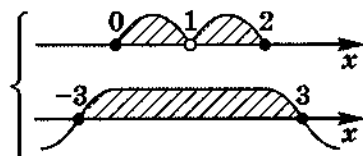
$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \\ \arccos(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 \neq 1 \end{cases};$$



$$D(y) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right).$$

$$3) y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\arcsin(x-1)}.$$

$$\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1 \\ \arcsin(x-1) \neq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 \neq 0 \\ (3-x)(3+x) \geq 0 \end{cases};$$



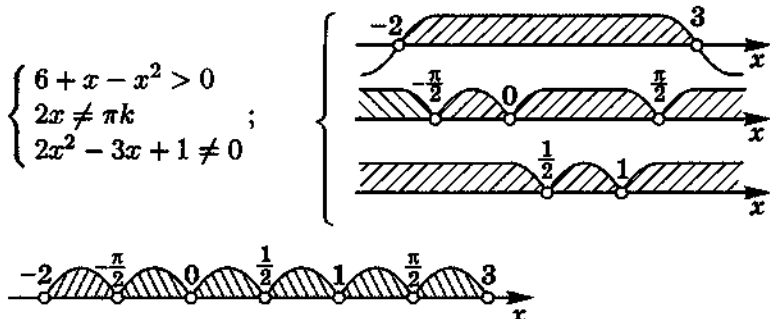
$$D(y) = [0; 1) \cup (1; 2].$$

$$4) y = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}.$$

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ \operatorname{arctg} x \neq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 2; \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$$D(y) = (-2; 1) \cup (1; 2).$$

$$5) y = \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot \log_3(6 + x - x^2)}{\operatorname{arctg}(2x^2 - 3x + 1)}.$$



$$D(y) = \left(-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 3\right).$$

$$6) y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}};$$

$$\begin{cases} -1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \forall x (\operatorname{arctg} x \in (0\pi)) \end{cases};$$

$$D(y) = [0; 1].$$

Свойства арг-функций и некоторые соотношения между ними

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$	8.1
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$	8.2
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	8.3
$\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x$	8.4
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$	8.5
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$	8.6
$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$	8.7
$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$	8.8
$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$	8.9
$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$	8.10
$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \end{cases}$	8.11
$\operatorname{arccctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \end{cases}$	8.12
$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arccctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0 \end{cases}$	8.13

Тригонометрические функции от арг-функций

Формулы	$D(y)$	
$\sin(\arcsin x) = x$	$-1 \leq x \leq 1$	9.1
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$	$-1 \leq x \leq 1$	9.2
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.3
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.4
$\cos(\arccos x) = x$	$-1 \leq x \leq 1$	9.5
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$	$-1 \leq x \leq 1$	9.5
$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.7
$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$-\infty < x < \infty$	9.8
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$	9.9
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$	9.10
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$	9.11
$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$-1 \leq x < 0;$ $0 < x \leq 1$	9.12
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$	$-\infty < x < \infty$	9.13
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$	$\forall x \neq 0$	9.14
$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$-1 \leq x < 0;$ $0 < x \leq 1$	9.15
$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$-1 < x < 1$	9.16

Практикум 13

1. Вычислите:

1) $\sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right);$

2) $\sin (\operatorname{arctg} 2);$

3) $\cos \left(2 \arcsin \frac{2}{5} \right);$

4) $\cos (2 \operatorname{arctg} 2);$

5) $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) + \cos (\operatorname{arctg} 2\sqrt{2});$

6) $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{12}{13} \right);$

2. Решите уравнения:

1) $\sin (\arcsin (2x^2 + 3x)) = 2x + 3;$

2) $\cos (\arcsin x) = |x|.$

Решение практикума 13

1. Вычислите:

$$1) \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = \boxed{\frac{4}{5}}. \quad (\text{см. табл. на стр. 301})$$

$$2) \sin (\operatorname{arctg} 2) = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}. \quad (\text{см. табл. на стр. 301})$$

$$3) \cos \left(2 \arcsin \frac{2}{5} \right) =$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha} \quad 5.2$$

$$= 1 - 2\sin^2 \left(\arcsin \frac{2}{5} \right) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \boxed{\frac{17}{25}}.$$

$$4) \cos (2 \operatorname{arctg} 2) =$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad 5.4$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 (\operatorname{arctg} 2)}{1 + \operatorname{tg}^2 (\operatorname{arctg} 2)} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \boxed{-\frac{3}{5}}.$$

$$5) \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) + \cos (\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}) =$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad 5.3$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad 1.5$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\operatorname{arctg} x) > 0$.

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)} + \frac{1}{\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{1}{3} = \frac{28}{30} = \boxed{\frac{14}{15}}. \quad (\text{см. табл. на стр. 301})$$

$$6) \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{12}{13} \right). \quad \boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}} \quad 4.5$$

$$\text{Обозначим } \alpha = \arccos \frac{3}{5}; \quad \beta = \arcsin \frac{12}{13},$$

тогда (см. табл. на стр. 301)

$$\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{3}{5} \right) = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{12}{13} \right) = \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2}} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5};$$

$$\text{и } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{4}{3} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{20 + 36}{15 - 48} = \frac{56}{-33} = \boxed{-1 \frac{23}{33}}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \sin(\arcsin(2x^2 + 3x)) = 2x + 3. \quad D(Y): \begin{cases} |2x^2 + 3x| \leq 1 \\ |2x + 3| \leq 1 \end{cases};$$

$$2x^2 + 3x = 2x + 3; \quad (x - 1)(2x + 3) = 0, \text{ значит}$$

$$\begin{cases} x = 1 \notin D(Y), \text{ так как } |2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1| \leq 1 - \text{ложь} \\ x = -1,5 \in D(Y) \end{cases}$$

$$x = -1,5 \in D(Y), \text{ так как}$$

$$\begin{cases} |2 \cdot (-1,5)^2 + 3 \cdot (-1,5)| = 0 \leq 1 \\ |2 \cdot (-1,5) + 3| = 0 \leq 1 \end{cases} \quad - \text{ истина.}$$

$$\text{Ответ: } x = -1,5.$$

$$2) \cos(\arcsin x) = |x|;$$

$$D(Y): -1 \leq x \leq 1; \text{ (см. табл. на стр. 301)}$$

$$\sqrt{1 - x^2} = |x|, \text{ тогда } x^2 = 1 - x^2;$$

$$\left((|x|)^2 = x^2 \right) \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Практикум 14

Решите уравнения:

1) $2 \arcsin x + 3 \arccos x = \pi$;

2) $2 \arcsin x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$;

3) $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2 \operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$;

4) $\operatorname{arctg} x - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{3}$;

5) $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{2\pi}{3}$;

6) $\arcsin x = 2 \arcsin (x\sqrt{3})$;

7) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$;

8) $\arccos \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} (1 - x^4)$;

9) $\arccos x + \arccos 2x = \arccos (3x - 1)$.

Решение практикума 14

Решите уравнения:

1) $2 \arcsin x + 3 \arccos x = \pi$.

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

то $2(\arcsin x + \arccos x) + \arccos x = \pi$; $\pi + \arccos x = \pi$;
отсюда $\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

2) $2 \arcsin x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

8.7 а) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \arccos x$;

$2 \arcsin x - \arccos x = 0$, но $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$, т. е. $x = \frac{1}{2}$.

б) $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \pi - \arccos x$;

$2 \arcsin x + \arccos x = \pi$, но $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$,

т. е. $x = 1 \notin [-1; 0]$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

3) $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2 \operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$.

8.11 а) $x \geq 0 \Rightarrow \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$;

$\operatorname{arctg} x + 2 \operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}$, но $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Решая как систему, получим $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$, т. е. $x = \sqrt{3}$.

$$б) x < 0 \Rightarrow \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{arctg} x;$$

8.11

$$-\operatorname{arctg} x + 2 \operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{3}, \text{ но } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

тогда, решая как систему, получим

$$\operatorname{arctg} x = \frac{7\pi}{18}, \text{ т. е. } x = \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{18} \notin (-\infty; 0).$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

$$4) \operatorname{arctg} x - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{3}.$$

$$а) x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

8.12

(см. табл. на стр. 300)

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{3}, \text{ но}$$

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

тогда, решая как систему, получим

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{18}, \text{ значит } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos \frac{\pi}{18}.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 \frac{\pi}{18}; \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{18}} = 1+x^2;$$

$$\frac{1 - \cos^2 \frac{\pi}{18}}{\cos^2 \frac{\pi}{18}} = x^2; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{18} = x^2; \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \\ x = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \notin [0; +\infty) \end{cases}.$$

$$б) x < 0, \text{ тогда } \operatorname{arctg} x = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

8.12

(см. табл. на стр. 300)

$$\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{но } \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{значит } \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{6}; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{4};$$

$$1+x^2 = \frac{4}{3}; \quad x^2 = \frac{1}{3}; \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-\infty; 0) \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \right\}.$$

$$5) \arcsin x + \arcsin 2x = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\arcsin 2x = \frac{2\pi}{3} - \arcsin x, \text{ тогда}$$

$$\sin(\arcsin 2x) = \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \arcsin x \right);$$

$$2x = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos(\arcsin x) - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin(\arcsin x).$$

$$\text{Так как } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ то } \cos(\arcsin x) \geq 0,$$

$$\text{тогда } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Уравнение примет вид } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x;$$

$$3x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 = 3 - 3x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Проверка подтверждает, что } x = \frac{1}{2} - \text{ корень уравнения.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}.$$

$$6) \arcsin x = 2 \arcsin(x\sqrt{3}).$$

$$\sin(\arcsin x) = \sin(2 \arcsin(x\sqrt{3})) \quad (\text{см. табл. на стр. 301});$$

$$\text{так как } \cos(\arcsin(x\sqrt{3})) = \sqrt{1-3x^2} \text{ и}$$

$$\sin(2 \arcsin(x\sqrt{3})) = 2 \sin(\arcsin(x\sqrt{3})) \cdot \cos(\arcsin(x\sqrt{3})),$$

$$\text{то } x = 2 \cdot x\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-3x^2}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2\sqrt{3-9x^2} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4(3-9x^2) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{11}{36} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{11}}{6} \\ x = -\frac{\sqrt{11}}{6} \end{cases}.$$

Проверим:

$$a) x = 0; \quad \arcsin 0 = 2 \arcsin(0 \cdot \sqrt{3}); \quad 0 = 0 - \text{ истина.}$$

$$б) x = \frac{\sqrt{11}}{6}; \quad \arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6};$$

$$\text{так как } \frac{\sqrt{11}}{6} < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{11}{36} < \frac{1}{2} \right), \text{ то}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (y = \arcsin x \uparrow).$$

$$\text{С другой стороны, } \frac{\sqrt{33}}{6} > \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{33}{36} > \frac{1}{2} \right), \text{ тогда}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{33}}{6} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Таким образом, получим } \begin{cases} 2 \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6} > \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ значит}$$

$$\text{уравнение при } x = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ решения не имеет.}$$

$$в) x = -\frac{\sqrt{11}}{6}; \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right) = 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{33}}{6}\right);$$

$$\text{тогда } -\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} = -2 \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6},$$

т. е. $\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6}$, но мы уже доказали, что это ложь.

Ответ: $x = 0$.

$$7) \operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x.$$

$$\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg}(x+1)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x);$$

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases} \quad (4.5) \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos(\alpha - \beta) \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases} \quad (4.6) \end{array}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1)) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-1)) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)};$$

$$\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{3x-x}{1+3x \cdot x};$$

$$\frac{2x}{2-x^2} = \frac{2x}{1+3x^2}; \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 \neq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

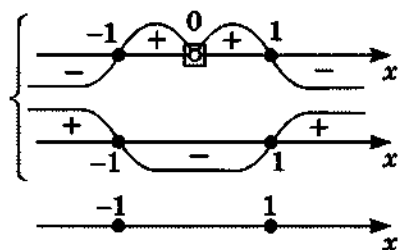
Проведя проверку, убеждаемся, что

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2} - \text{ корни.}$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}.$$

$$8) \arccos \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} (1 - x^4).$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} (1 - x^4) \leq \pi \end{cases}$$



Проверка показывает, что $x = -1$ и $x = 1$ — корни уравнения.

Ответ: $\{-1; 1\}$.

$$9) \arccos x + \arccos 2x = \arccos(3x - 1).$$

$$D(Y) : \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x| \leq \frac{1}{2} \\ |3x - 1| \leq 1 \end{cases} ; \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \quad \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\cos(\arccos x + \arccos 2x) = \cos(\arccos 3x - 1);$$

$$\cos(\arccos x) \cdot \cos(\arccos 2x) - \sin(\arccos x) \cdot \sin(\arccos 2x) = 3x - 1;$$

$$x \cdot 2x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - 4x^2} = 3x - 1;$$

$$2x^2 - 3x + 1 = \sqrt{(1 - x^2)(1 - 4x^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ \text{условие равносильности.} \end{cases}$$

Но $D(Y) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, значит корни должны $\in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

$$(x - 1)^2(2x - 1)^2 = (1 - x^2)(1 - 4x^2);$$

$$(x - 1)(2x - 1)(2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 3x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)(2x - 1) \cdot 6x = 0; \quad \begin{cases} x = 1 \notin D(Y) \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

Тренировочная работа 17

Вычислите:

- 1) $\sqrt{6} \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \right);$
- 2) $\operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{1}{2} \right);$
- 3) $\sin \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right);$
- 4) $\frac{1}{\pi} \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right];$
- 5) $\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right];$
- 6) $\frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} \right);$
- 7) $\operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right);$
- 8) $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3);$
- 9) $\sin^2 [\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-0,5)];$
- 10) $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75};$
- 11) $\cos \left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \sin \left(4 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right);$
- 12) $\frac{4}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x \right)$ при $x = \sqrt{168}.$

Решение тренировочной работы 17

Вычислите:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{6} \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \right) &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}{2}} = \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}}{2}} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{9}}}{2}} = \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2 \cdot 3}} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 \cdot 3}} = \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 \cdot 3}} = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2 \cdot 3}} = \boxed{\sqrt{2} - 1}. \end{aligned}$$

$$\cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \right) > 0, \text{ так как } \arcsin \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} 2) \operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{1}{2} \right) &= \frac{2 \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{1}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\arccos \frac{1}{2} \right)}; \\ \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{1}{2} \right) &= \frac{\sin \left(\arccos \frac{1}{2} \right)}{\cos \left(\arccos \frac{1}{2} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{1}{2} \right)}}{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \boxed{-\sqrt{3}}.$$

$$\sin \left(\arccos \frac{1}{2} \right) > 0 \quad \arccos \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{или } \operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{1}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{2}{3} \pi \right) = \boxed{-\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sin \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right) = \\
 & = 2 \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \cdot \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) = \\
 & = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} = \boxed{0,96}. \\
 & \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \geq 0, \text{ так как } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]. \\
 & \text{Так как } \arcsin(-m) = -\arcsin m; \arccos(-m) = \pi - \arccos m, \\
 & \text{то } \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}; \\
 & \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \\
 & \text{Значит, } \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{0,5}.
 \end{aligned}$$

Примечание. Можно проще, если знать тождество $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ при любом $x \in [-1; 1]$.

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \left[\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]. \\
 & \text{Пусть } \arccos \frac{3}{5} = \alpha; \cos \alpha = \frac{3}{5}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \\
 & \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) = \beta; \quad \operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi. \\
 & \text{Тогда } \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} 2\beta}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\beta}.
 \end{aligned}$$

$$а) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (\sin \alpha > 0).$$

$$\text{Значит } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta};$$

$$\text{так как } \operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} \beta = -2.$$

$$\text{Значит } \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}.$$

$$в) \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} 2\beta}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3-8}{6}}{\frac{6+4}{6}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2}.$$

$$6) \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} \right).$$

$$а) \text{ Пусть } \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \alpha; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4};$$

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \beta; \operatorname{tg} \beta = \frac{7}{23}.$$

$$б) \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Значит } \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\frac{8}{15} + \frac{7}{23}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{23}} = \frac{23 \cdot 8 + 7 \cdot 15}{15 \cdot 23 - 8 \cdot 7} = \frac{289}{289} = 1.$$

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \operatorname{arctg} \frac{7}{23} < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{тогда } 0 < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{4}, \text{ значит } 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} \right) = 0,25.$$

$$7) \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right).$$

$$\text{Пусть } \arccos \frac{2}{5} = \alpha; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$

$$\text{а) } \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{-1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 + \frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{21}}{7} - 1} = \frac{7 + \sqrt{21}}{\sqrt{21} - 7} = \\ &= -\frac{(7 + \sqrt{21})^2}{28} = -\frac{49 + 21 + 14\sqrt{21}}{28} = -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{\frac{\sqrt{21}}{7} - 1}{\frac{\sqrt{21}}{7} + 1} = \frac{\sqrt{21} - 7}{\sqrt{21} + 7} = \\ &= -\frac{21 + 49 - 14\sqrt{21}}{28} = -\frac{5 - \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) &= \\ &= -\frac{5 + \sqrt{21}}{2} - \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = -5. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{11\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} \right) = -5.$$

8) $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3).$

а) $\operatorname{arctg} 7 = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = 7;$
 $\operatorname{arctg} 3 = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = 3.$

б) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - 7^2}{1 + 7^2} = -\frac{48}{50} = -\frac{24}{25}.$

в) $\sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta;$

$$\sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{3}{5};$$

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Тогда } \sin 4\beta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Значит } \cos 2\alpha - \sin 4\beta = -\frac{24}{25} - \left(-\frac{24}{25} \right) = 0.$$

Ответ: $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = 0.$

$$9) \sin^2 [\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-0,5)].$$

$$а) \operatorname{arctg} 3 = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = 3;$$

$$б) \operatorname{arctg}(-0,5) = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = -0,5;$$

$$в) \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$г) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{3 - (-0,5)}{1 + 3 \cdot (-0,5)} = \frac{3,5}{1 - 1,5} = \frac{3,5}{-0,5} = -7;$$

$$д) \text{ тогда } \sin^2(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)},$$

$$\text{т. е. } \sin^2(\alpha - \beta) = \frac{(-7)^2}{1 + (-7)^2} = \frac{49}{50} = 0,98.$$

$$\text{Ответ: } \sin^2 [\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-0,5)] = 0,98.$$

$$10) \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75}.$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} = x;$$

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} \right) = \operatorname{tg} \left(x - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right).$$

$$\begin{aligned} а) \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} \right) &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{11}{75} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{11}{75} \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} + \frac{11}{75}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{75}} = \frac{75 + 44}{300 - 11} = \frac{119}{289} = \frac{7}{17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \operatorname{tg} \left(x - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right)}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right)} = \\
 &\left[\operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \right] \\
 &= \frac{\operatorname{tg} x - \frac{5}{12}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \frac{5}{12}} = \frac{12 \operatorname{tg} x - 5}{12 + 5 \operatorname{tg} x}.
 \end{aligned}$$

$$\text{в) } \frac{7}{17} = \frac{12 \operatorname{tg} x - 5}{12 + 5 \operatorname{tg} x};$$

$$7 \cdot (12 + 5 \operatorname{tg} x) = 17 \cdot (12 \operatorname{tg} x - 5);$$

$$7 \cdot 12 + 5 \cdot 17 = (12 \cdot 17 - 7 \cdot 5) \operatorname{tg} x;$$

$$169 = 169 \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\text{значит } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{11}{75} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} < \pi.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} = \frac{\pi}{4}.$$

$$11) \cos \left(2 \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \sin \left(4 \operatorname{arccos} \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \cos \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} \right) &= 1 - 2 \sin^2 \left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \\
 &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sin \left(4 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \\
 & = 2 \sin \left(2 \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \cdot \cos \left(2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \\
 & = 4 \sin \left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \cdot \cos \left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(2 \cos^2 \left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) - 1 \right) = \\
 & = 4 \sqrt{1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{3}{10} \right)} \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(2 \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2 - 1 \right) = \\
 & = 4 \sqrt{1 - \frac{9}{10}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \left(\frac{2-9}{10} - 1 \right) = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 3 \left(\frac{8}{10} \right) = \frac{24}{25}.
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\cos \left(2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \sin \left(4 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \frac{3}{5} - \frac{24}{25} = \boxed{-\frac{9}{25}}.$$

$$12) \quad \frac{4}{\pi} \left(\arctg \frac{1+x}{1-x} - \arctg x \right) \text{ при } x = \sqrt{168}.$$

$$a) \quad \text{Пусть } \arctg \frac{1+x}{1-x} = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\text{При } x = \sqrt{168} \quad \operatorname{tg} \alpha < 0, \text{ т.е. } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

$$6) \quad \arctg x = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = x; \text{ так как } x = \sqrt{168}, \text{ то } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\operatorname{tg} \beta}{1-\operatorname{tg} \beta} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \beta \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \beta + \pi \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \beta - \pi \end{cases} \text{ Проверим:}$$

$$1. -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \beta < 0; \quad -\frac{3\pi}{4} < \beta < -\frac{\pi}{4}, \text{ но } \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2. -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \beta + \pi < 0; \\ -\frac{3\pi}{2} < \beta < -\frac{5\pi}{4} \text{ — также невозможно } \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$3. -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \beta - \pi < 0; \quad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{3\pi}{4}, \text{ и } \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Тогда } \alpha = \beta - \frac{3\pi}{4}. \text{ Учтем, что } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{4}{\pi} \left(\arctg \frac{1+x}{1-x} - \arctg x \right) &= \frac{4}{\pi} \left(\beta - \frac{3\pi}{4} - \beta \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \left(-\frac{3\pi}{4} \right) = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{\pi} \left(\arctg \frac{1+x}{1-x} - \arctg x \right) = -3 \text{ при } x = \sqrt{168}.$$

Примечание. Можно иначе, если знать, что $\arctg(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$. Остается убедиться, что только при $k = 1$ все условия будут выполняться.

Графики аргс-функций

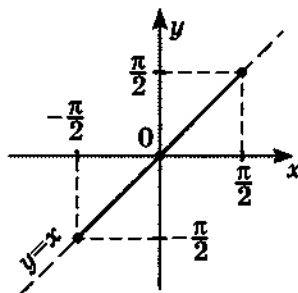
1. Рассмотрим функцию $y = \arcsin(\sin x)$.

Так как $y = \sin x$ — функция периодическая, где $T_0 = 2\pi$ на всей числовой оси, то $y = \arcsin(\sin x)$ также периодическая с основным периодом $T_0 = 2\pi$.

Значит для исследования поведения функции и построения графика $y = \arcsin(\sin x)$ достаточно рассмотреть функцию на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, длина которого равна 2π , причем по определению $\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = E(\arcsin(\sin x))$.

1) Пусть $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

на этом промежутке
 $y = \sin x$ монотонно
 возрастает и имеет обрат-
 ную ей функцию, тогда
 $y = \arcsin(\sin x) = x$.

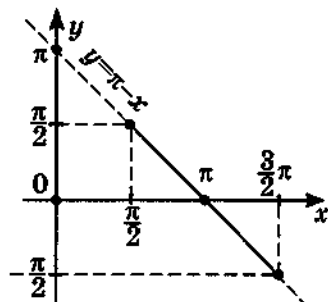


2) С другой стороны, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Тогда, если $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$,

т.е. на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ $y = \sin x$

монотонно убывает,
 а значит имеет об-
 ратную ей функцию
 $y = \arcsin(\sin x) = \pi - x$,
 причем $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] =$
 $= E(\arcsin(\sin x))$.



Итак на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \arcsin(\sin x)$, и, учитывая основной период $T_0 = 2\pi$, можно говорить о поведении и графика функции на любом промежутке.

Подводя итоги, отметим, что так как

$$\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то именно из-за этого условия}$$

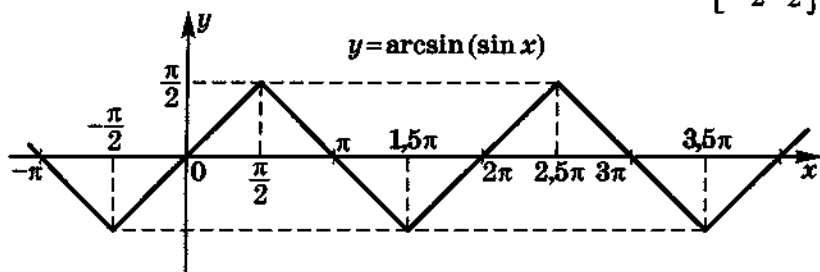
1) Так как $\arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \quad \arcsin(\sin x) = x - 2\pi k,$$

$$\text{где } x - 2\pi k \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

2) при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x - 2\pi k, \text{ где } \pi - x - 2\pi k \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



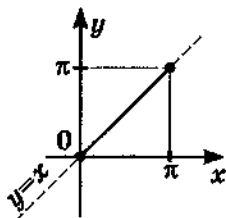
Функция имеет аналитический вид

$$y = \arcsin(\sin x) = (-1)^k x + \pi k, \text{ где } -\frac{\pi}{2} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

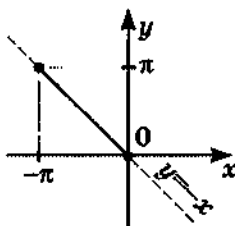
2. Рассмотрим функцию $y = \arccos(\cos x)$. Рассуждая аналогично, получаем, что данная функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$. Поэтому достаточно рассмотреть ее на $[-\pi; \pi]$.

- 1) Пусть $x \in [0; \pi]$ на этом промежутке $y = \cos x$ *монотонно* убывает и имеет обратную ей функцию, тогда $y = \arccos(\cos x) = x$,

причем $\arccos(\cos x) \in [0; \pi] = E(\arccos(\cos x))$.



- 2) С другой стороны, $y = \cos x$ — четная функция, т.е. $\cos(-x) = \cos x$, тогда если $-x \in [0; \pi]$, то $x \in [-\pi; 0]$ т.е. на $[-\pi; 0]$ $y = \cos x$ *монотонно* возрастает, а значит имеет обратную функцию $y = \arccos(\cos x) = -x$, причем $-x \in [0; \pi] = E(\arccos(\cos x))$.

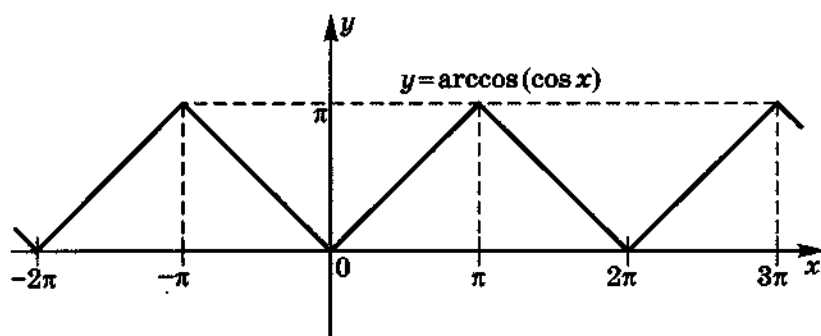


Итак, на $[-\pi; \pi]$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \arccos(\cos x)$ и учитывая основной период $T_0 = 2\pi$ можно судить о поведении и графике функции на любом промежутке.

Подводя итоги отметим, что так как $\arccos(\cos x) \in [0; \pi]$, то

1) при $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$ $\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$

2) при $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$ $\arccos(\cos x) = -x + 2\pi k$



Функция имеет аналитический вид

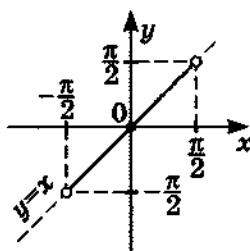
$$y = \arccos(\cos x) = |x - 2\pi k|,$$

где $\pi(2k - 1) \leq x \leq \pi(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Так как $y = \operatorname{tg} x$ — функция непрерывная, где $T_0 = \pi$ на всей числовой оси, то $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ — периодическая с основным периодом $T_0 = \pi$, значит для исследования поведения функции и построения графика $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ достаточно рассмотреть функцию на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, причем по определению $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = E(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))$.

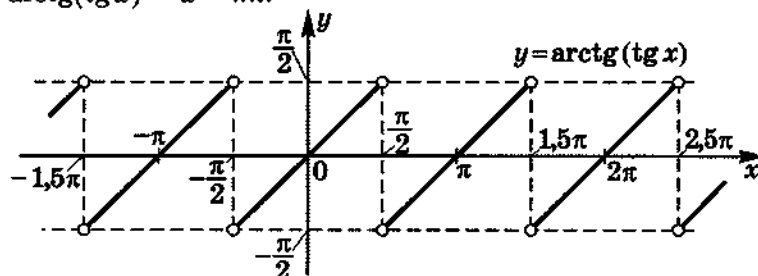
Пусть $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает и имеет обратную функцию, тогда $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.



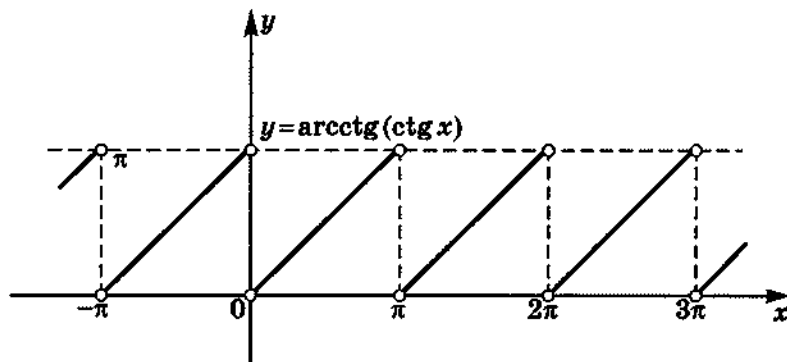
Итак на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мы рассмотрели характер поведения и график функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$ и учитывая основной период $T_0 = 2\pi$ можно говорить о поведении и графика функции на любом промежутке.

Подводя итоги отметим, что так как

$\arctg(\operatorname{tg} x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
 $\arctg(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$.



4. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arcc}tg(\operatorname{ctg} x)$. Рассуждая аналогично и учитывая, что $\operatorname{arcc}tg(\operatorname{ctg} x) \in (0; \pi)$, получим, что при $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$ $\operatorname{arcc}tg(\operatorname{ctg} x) = x - \pi k$.



Практикум 15

1. Вычислите:

- 1) $\arctg(\operatorname{tg} 3)$;
- 2) $\arcsin(\sin 2)$;
- 3) $\frac{1}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{29\pi}{5}\right)$;
- 4) $\arccos(\cos 4)$;
- 5) $\frac{7}{\pi} \arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$;
- 6) $\operatorname{arcc}(\operatorname{ctg}(-3))$;
- 7) $\frac{3}{\pi} \left[\arcsin x - \arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2}\right) \right]$ при $x = 0,1$;
- 8) $\frac{2}{\pi} [2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x-1)]$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

2. Решите уравнения:

- 1) $\arcsin\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = 2x - 1$;
- 2) $\arccos(-2 \sin^2 x^2 + 1) = x$;
- 3) $\arctg \frac{2x}{1-x^2} = 2(\pi - 3)$;
- 4) $\operatorname{arcc}(\operatorname{ctg}(4x^2 - 10x - 10)) = x^2 - 3x$.

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

- 1) $y = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$;
- 2) $y = \frac{1}{\pi} \left(2 \arctg x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)$;
- 3) $y = \frac{1}{\pi} (2 \arcsin x + \arccos(2x^2 - 1))$;
- 4) $y = \frac{1}{\pi} \left(2 \arctg x - \arctg \frac{2x}{1-x^2} \right)$;
- 5) $y = \frac{3}{\pi} (2 \arccos x - \arccos(4x^3 - 3x))$.

Решение практикума 15**1. Вычислите:**

1) $\arctg(\operatorname{tg} 3)$.

Учтем, что $\arctg(\operatorname{tg} x) = x - \pi k$ при $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Так как $3 \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $k = 0$, а $3 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

при $k = 1$ (см. график), то $\arctg(\operatorname{tg} 3) = \boxed{3 - \pi}$.

2) $\arcsin(\sin 2)$.

Учтем, что $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при $k = 0$, а $2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (см. график), то $\arcsin(\sin 2) = \boxed{\pi - 2}$.

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{29\pi}{5}\right) &= \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\sin \frac{29\pi}{5}\right) \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin\left[\sin\left(6\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right] = \frac{1}{\pi} \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{5}\right) = \boxed{-0,2} \quad \left(-\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

4) $\arccos(\cos 4)$.

Учтем, что $\arccos(\cos x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k \leq x \leq (2k+1)\pi k \\ -x + 2\pi k, & (2k-1)\pi \leq x \leq 2\pi k \end{cases} \quad | k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $4 \notin [0; \pi]$ при $k = 0$, а $4 \in [\pi; 2\pi]$ (см. график), то $\arccos(\cos 4) = \boxed{2\pi - 4}$.

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{7}{\pi} \arccos \left[\sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right] &= \left(0 \leq \arccos \left(\sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right) \leq \pi \right) \\
 &= \frac{7}{\pi} \arccos \left[\sin \left(\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{7}{\pi} \arccos \left(-\cos \frac{5\pi}{14} \right) = \\
 &= \frac{7}{\pi} \left[\pi - \arccos \left(\cos \frac{5\pi}{14} \right) \right] = \frac{7}{\pi} \left(\pi - \frac{5\pi}{14} \right) = \\
 &= \frac{7}{\pi} \cdot \frac{9\pi}{14} = \boxed{4,5} \quad \left(\frac{5\pi}{14} \in [0; \pi] \right).
 \end{aligned}$$

$$6) \arctg(\operatorname{ctg}(-3)).$$

Учтем, что $\arctg(\operatorname{ctg} x) = x - \pi k$ при $\pi k < x < \pi + \pi k$.

Так как $-3 \notin (0; \pi)$, а $-3 \in (-\pi; 0)$ (см. график),

то $\arctg(\operatorname{ctg}(-3)) = \boxed{-3 + \pi}$.

$$7) \quad \frac{3}{\pi} \left[\arcsin x - \arcsin \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} \right) \right] \text{ при } x = 0, 1.$$

$$a) \text{ Пусть } \arcsin x = \alpha; \quad \sin \alpha = x;$$

так как $x > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha > 0$.

$$б) \arcsin \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} \right) = \beta;$$

$$\sin \beta = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2};$$

так как $x > 0$, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Раз $\sin \alpha = x$, значит

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\arcsin \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \alpha + \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi k$

при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$,

значит $0 < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

Так как $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ($k=0$), то $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$.

Так как $x = 0,1$, то $0 < 0,1 < \frac{1}{2}$ ($\arcsin 0,1 = \alpha$),

значит $0 < \arcsin 0,1 < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

$0 < \arcsin 0,1 + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, т.е. $0 < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{3}{\pi} \left[\arcsin x - \arcsin \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} \right) \right] &= \\ &= \frac{3}{\pi} \left[\alpha - \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{3}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{\pi} \left[\arcsin x - \arcsin \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2} \right) \right] = -1.$$

$$8) \frac{2}{\pi} [2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x-1)] \text{ при } x = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

а) Пусть $\arcsin \sqrt{x} = \alpha$; $\sin \alpha = \sqrt{x} > 0$,

значит, с учетом условий, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

б) Пусть $\arcsin(2x-1) = \beta$; $\sin \beta = 2x-1$; при $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$2x-1 < 0$, значит $\sin \beta < 0$, т.е. $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

С другой стороны, $2x-1 = 2(\sqrt{x})^2 - 1 = 2\sin^2 \alpha - 1 =$

$= -\cos 2\alpha$, т.е. $\sin \beta = -\cos 2\alpha = \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$.

Тогда $\sin \beta = \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$, значит

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2} \\ \beta = \pi - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha \end{cases}, \text{ но } -\frac{\pi}{2} < \beta < 0.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - 2\alpha < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \end{cases}, \text{ но } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } \left(0; \frac{\pi}{4} \right) \subset \left(0; \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{значит } \beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } & \frac{2}{\pi} [2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x - 1)] = \\ & = \frac{2}{\pi} \left[2\alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{\pi} [2 \arcsin \sqrt{x} - \arcsin(2x - 1)] = 1 \text{ при } x = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \arcsin \left(\sin \frac{8\pi}{7} \right) = 2x - 1.$$

$$D(Y): -\frac{\pi}{2} \leq 2x - 1 \leq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2 - \pi}{4} \leq x \leq \frac{2 + \pi}{4}.$$

Так как $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \pi - x + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{и } \frac{8\pi}{7} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], \text{ то } \arcsin \left(\sin \frac{8\pi}{7} \right) = \pi - \frac{8\pi}{7},$$

$$\text{т. е. } \arcsin\left(\sin \frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{\pi}{7},$$

$$\text{значит } 2x - 1 = -\frac{\pi}{7}; \quad x = \frac{-\pi + 7}{14} \in D(Y).$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{7 - \pi}{14}.$$

$$2) \arccos(-2\sin^2 x^2 + 1) = x.$$

$$D(Y) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ -1 \leq -2\sin^2 x^2 + 1 \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \pi \\ -1 \leq \cos 2x^2 \leq 1 \end{array} \right\};$$

$\arccos(\cos 2x^2) = x$; так как

$$\arccos x = \begin{cases} x - 2\pi k, & 2\pi k \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -x + 2\pi k, & (2k-1)\pi \leq x \leq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и $0 \leq x \leq \pi$ при $k=0$, то $\arccos(\cos 2x^2) = 2x^2$, тогда

$$2x^2 = x; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = x \\ 0 \leq 2x^2 \leq \pi \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq 2x^2 \leq \pi \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}.$$

$$3) \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = 2(\pi - 3).$$

$$D(Y): x \neq \pm 1.$$

$$\text{Пусть } x = \operatorname{tg} \alpha, \text{ тогда } \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2(\pi - 3);$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\alpha) = 2(\pi - 3) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \quad k=0 \text{ (см. график),}$$

$$\text{тогда } 2\alpha - \pi k = 2(\pi - 3); \quad \alpha = \pi - 3 + \frac{\pi}{2}k.$$

- а) Пусть $k = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\alpha = \pi - 3 + \pi n$, значит

$$x = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - 3 + \pi n) = \operatorname{tg}(-3) = -\operatorname{tg} 3, \\ \text{т.е. } x = -\operatorname{tg} 3 \in D(Y).$$

- б) Пусть $k = 2n - 1$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $\alpha = \pi - 3 + \pi n - \frac{\pi}{2}$, значит

$$x = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(-3 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}(-3) = \operatorname{ctg} 3 \in D(Y).$$

Ответ: $\{-\operatorname{tg} 3; \operatorname{ctg} 3\}$.

4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(4x^2 - 10x - 10)) = x^2 - 3x$

Уравнение равносильно системе:

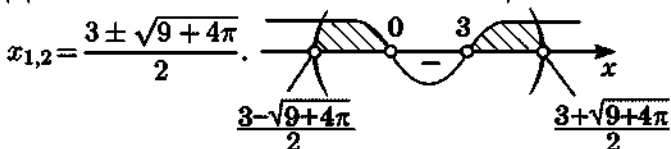
$$\begin{cases} 4x^2 - 10x - 10 - \pi k = x^2 - 3x \\ \pi k < 4x^2 - 10x - 10 < \pi + \pi k \\ 0 < x^2 - 3x < \pi \end{cases}$$

Тогда $3x^2 - 7x - 10 - \pi k = 0$, $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{169 + 12\pi k}}{6}$.

а) При $k = 0$ $\begin{cases} x = -1 \quad \varphi(-1) = 4 \notin (0; \pi) \\ x = \frac{10}{3} \quad \varphi\left(\frac{10}{3}\right) = 1\frac{1}{9} \in (0; \pi) \end{cases}$

(где $\varphi(k) = x^2 - 3x$).

Для $0 < x^2 - 3x < \pi$ $x^2 - 3x - \pi = 0$;



б) При $k = 1$ $3x^2 - 7x - 10 - \pi = 0$;

$$\begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{169 + 12\pi}}{6} \notin \left(3; \frac{\sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right) \\ x = \frac{7 - \sqrt{169 + 12\pi}}{6} \notin \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \end{cases}$$

Очевидно, что для $k \in \mathbb{N}$ корни не подходят условию $x \in \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \cup \left(3; \frac{3 + \sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right)$.

в) При $k = -1$ $3x^2 - 7x - 10 + \pi = 0$;

$$\begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{169 - 12\pi}}{6} \in \left(3; \frac{7 + \sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right) \\ x = \frac{7 - \sqrt{169 - 12\pi}}{6} \in \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \end{cases}.$$

г) При $k = -2$ $3x^2 - 7x - 10 + 2\pi = 0$;

$$\begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{169 - 24\pi}}{6} \notin \left(3; \frac{3 + \sqrt{9 + 4\pi}}{2}\right) \\ x = \frac{7 - \sqrt{169 - 24\pi}}{2} \notin \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 4\pi}}{2}; 0\right) \end{cases}.$$

Аналогично для любых $k < -2 \mid k \in \mathbb{Z}$

(при $k < -4$ $D < 0$).

Ответ: $\left\{ \frac{7 - \sqrt{169 - 12\pi}}{6}; \frac{7 + \sqrt{169 - 12\pi}}{6}; 3\frac{1}{3} \right\}$.

3. Найдите $E(y)$.

1) $y = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}} \right)$.

Пусть $\arcsin x = \alpha$; $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; $\sin \alpha = x$.

Тогда $\frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \alpha - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{2}} =$
 $= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}} = \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$

а) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$,
 значит на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ $\arcsin \left(\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \alpha - \frac{\pi}{4}$,

при этом $y = \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = 0,25$.

Итак, на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ $y = 0,25$.

$$б) -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{4}, \text{ тогда } -\frac{3}{4}\pi \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k & \text{при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k & \text{при } \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases},$$

то зная, что $-\frac{3}{4}\pi \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2}$,

$$\text{получим } \left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

Значит, это второй случай при $k = -1$,

тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - x - 2\pi = -\pi - x$,

$$\text{т.е. } \arcsin\left(\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\pi - \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi - \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$y = \frac{1}{\pi} \left(\alpha + \frac{3}{4}\pi + \alpha \right) = \frac{1}{\pi} \left(2\alpha + \frac{3}{4}\pi \right).$$

$f(\alpha)$ — возрастающая, тогда на $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$:

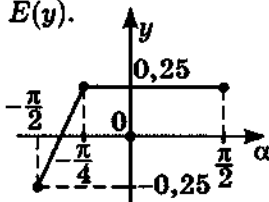
$$f_{\text{наим}} = \frac{1}{\pi} \left(2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -0,25;$$

$$f_{\text{наиб}} = \frac{1}{\pi} \left(2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0,25,$$

учитывая случай а).

Ответ: $E(y) = [-0,25; 0,25]$

График данной функции иллюстрирует исследование $E(y)$.



$$2) y = \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right).$$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$x = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha;$$

$$\arcsin(\sin 2\alpha) =$$

$$= \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ (первый случай)} \\ \pi - 2\alpha; & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\alpha \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \text{ (второй случай)} \end{cases}.$$

а) $k = 0$.

$$\arcsin(\sin 2\alpha) =$$

$$= \begin{cases} 2\alpha; & \frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2\alpha; & \frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases} = \begin{cases} 2\alpha; & -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ \pi - 2\alpha; & \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi \end{cases}.$$

Учтем только, что $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$1. \text{ на } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \quad y = \frac{1}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0;$$

$$2. \text{ на } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \quad y = \frac{1}{\pi}(2\alpha - (\pi - 2\alpha)) = \\ = \frac{1}{\pi}(4\alpha - \pi) = y(\alpha).$$

$y(\alpha)$ на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастающая линейная функция.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi\right) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi\right) = 1,$$

т.е. $y(\alpha) \in [0; 1)$ на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

б) при $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq -\frac{\pi}{4}$, т. е. $-\pi < 2\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$, что возможно

только при $k = -1$ во втором случае,

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi \leq 2\alpha \leq \frac{3}{2}\pi - 2\pi \quad -\frac{3}{2}\pi \leq 2\alpha \leq -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Но } \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right],$$

тогда $\arcsin(\sin 2\alpha) = -2\alpha - \pi$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$,
откуда следует, что

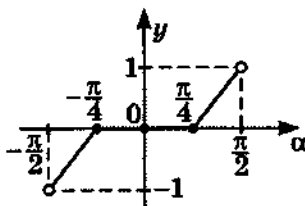
$$y(x) = \frac{1}{\pi}(2\alpha - (-2\alpha - \pi)) = \frac{1}{\pi}(4\alpha + \pi),$$

т. е. $y(\alpha)$ — возрастающая линейная функция.

$$\left. \begin{aligned} y\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{\pi}\left(4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -1 \\ y\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\pi}\left(4\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi\right) = 0 \end{aligned} \right\},$$

т. е. $y(\alpha) \in (-1; 0]$. Значит $E(y) = (-1; 1)$.

График иллюстрирует поведение данной функции.



$$3) y = \frac{1}{\pi}(2 \arcsin x + \arccos(2x^2 - 1)).$$

Пусть $\arcsin x = \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $x = \sin \alpha$.

$$\text{Значит } 2x^2 - 1 = 2\sin^2 \alpha - 1 = -\cos 2\alpha;$$

$$\arccos(2x^2 - 1) = \arccos(-\cos 2\alpha) = \pi - \arccos(\cos 2\alpha).$$

С другой стороны,

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k \leq 2\alpha \leq (2k+1)\pi \\ -2\alpha + 2\pi k; & (2k-1)\pi \leq 2\alpha \leq 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то

а) при $k = 0$ $0 \leq 2\alpha \leq \pi$,

значит на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$,

тогда $y(\alpha) = \frac{1}{\pi}(2\alpha + \pi - 2\alpha) = 1$

(напомним, что $\arccos(2x^2 - 1) = \pi - \arccos(\cos 2\alpha)$).

б) Во втором случае при $k = 0$ $-\pi \leq 2\alpha \leq 0$,

значит на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ $\arccos(\cos 2\alpha) = -2\alpha$,

тогда на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

$y(\alpha) = \frac{1}{\pi}(2\alpha + \pi - (-2\alpha)) = \frac{1}{\pi}(4\alpha + \pi)$, т. е.

$y(\alpha)$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ возрастающая линейная функция.

$y_{\max} = y(0) = \frac{1}{\pi}(4 \cdot 0 + \pi) = 1$;

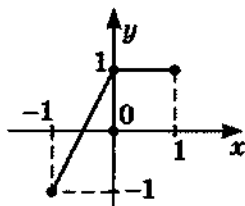
$y_{\min} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(4\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -1$.

Итак, подводя итоги, получим

на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $E(y) = [-1; 1]$;

$D(y) : \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |2x^2 - 1| \leq 1 \end{cases} \quad |x| \leq 1$.

График демонстрирует поведение данной функции.



$$4) y = \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \right).$$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $x = \operatorname{tg} \beta$,

$$\text{значит } \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1-\operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Отметим, что $\operatorname{arctg}(2\beta) = 2\beta - \pi k$,

где $2\beta \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

Рассмотрим

$$\text{а) при } k = 0 \quad -\frac{\pi}{2} < 2\beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{тогда на } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\beta) = 2\beta,$$

$$\text{значит на } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \quad y(\beta) = \frac{1}{\pi}(2\beta - 2\beta) = 0.$$

$$\text{б) при } k = 1 \quad \frac{\pi}{2} < 2\beta < \frac{3}{2}\pi,$$

$$\text{но } -\pi < 2\beta < \pi \quad \left(\text{т. к. } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{значит } \frac{\pi}{2} < 2\beta < \pi.$$

$$\text{тогда на } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\beta) = 2\beta - \pi.$$

Отсюда следует, что

$$y(\beta) = \frac{1}{\pi}(2\beta - (2\beta - \pi)) = 1 \quad \text{на } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{в) при } k = -1 \quad -\frac{3}{2}\pi < 2\beta < -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{но } -\pi < 2\beta < \pi, \text{ значит } -\pi < 2\beta < -\frac{\pi}{2}.$$

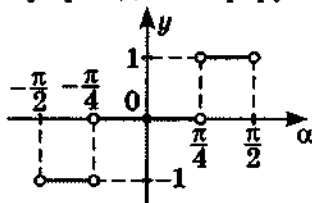
$$\text{Отсюда следует, что на } \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(2\beta) = 2\beta + \pi,$$

$$\text{тогда на } -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \quad y(\beta) = \frac{1}{\pi}(2\beta - (2\beta + \pi)) = -1.$$

Подводя итоги, получим $E(y) = \{-1; 0; 1\}$.

График демонстрирует поведение данной функции.



$$5) y = \frac{3}{\pi} (\arccos x - \arccos(4x^3 - 3x)).$$

Пусть $\arccos x = \beta$, где $\beta \in [0; \pi]$, тогда $x = \cos \beta$, значит $4x^3 - 3x = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta = \cos 3\beta$.

$$\text{Так как } \arccos(\cos 3\beta) = \begin{cases} 3\beta - 2\pi k; & 2\pi k \leq 3\beta \leq 2\pi k + \pi \\ -3\beta + 2\pi k; & 2\pi k - \pi \leq 3\beta \leq 2\pi k \end{cases}, \text{ то}$$

а) при $k = 0$ $0 \leq 3\beta \leq \pi$ в первом случае (второй случай $k = 0$ не подходит)

$$\text{на } \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta,$$

$$\text{значит на } \left[0; \frac{\pi}{3}\right] y(\beta) = \frac{3}{\pi}(3\beta - 3\beta) = 0.$$

б) Пусть $k = 1$ в первом случае $2\pi \leq 3\beta \leq 3\pi$,

$$\text{тогда на } \left[\frac{2}{3}\pi; \pi\right] \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta - 2\pi,$$

$$\text{значит на } \left[\frac{2}{3}\pi; \pi\right] \arccos(\cos 3\beta) = 3\beta - 2\pi,$$

$$\text{значит на } \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right] y(\beta) = \frac{3}{\pi}(3\beta - 3\beta + 2\pi) = 6.$$

в) При $k = 1$ во втором случае

$$\text{на } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right] \arccos(3\beta) = -3\beta + 2\pi,$$

$$\text{тогда на } \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$$

$$y(\beta) = \frac{3}{\pi}(3\beta - (-3\beta + 2\pi)) = \frac{3}{\pi}(6\beta - 2\pi).$$

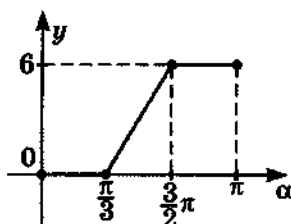
$y(\beta)$ на $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$ — возрастающая линейная функция.

$$y_{\max} = y\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{\pi} \left(6 \cdot \frac{2}{3}\pi - 2\pi\right) = 6$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi} \left(6 \cdot \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = 0$$

Подводя итоги, получим $E(y) = [0; 6]$.

График иллюстрирует поведение данной функции.



Примечание.

$$D(y) : \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |4x^3 - 3x| \leq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 4x^3 - 3x \leq 1 \\ 4x^3 - 3x \geq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)(2x+1)^2 \leq 0 \\ (x+1)(2x-1)^2 \geq 0 \end{cases}.$$

$D(y) = [-1; 1]$, дополнительных ограничений нет.

Тренировочная работа 18

1. Вычислите:

- 1) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 5)$;
- 2) $\arcsin(\sin(-3))$;
- 3) $\arccos(\cos 6)$;
- 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-4))$.

2. Решите уравнения:

- 1) $\arcsin\left(\sin \frac{11}{7}\pi\right) = 3x + 1$;
- 2) $\arccos\left(\cos \frac{17}{5}\pi\right) = 2 - 3x$;
- 3) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = x + 3$;
- 4) $\arccos(\cos(-4)) = 2x - 1$;
- 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 8) = 3 - 2x$;
- 6) $\operatorname{arccctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{5}\pi\right)\right) = 3x + 4$;
- 7) $\operatorname{arccctg}(2\sin^2 x - \sin x) = \frac{\pi}{4}$;
- 8) $\operatorname{arctg}(3\cos^3 2x + 4\cos 2x) = \frac{3}{4}\pi$;
- 9) $\arccos(\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} x)) = 0$;
- 10) $\operatorname{arctg}(2x^2 + x) + \operatorname{arctg}(2x^2 - x) = \frac{\pi}{4}$;
- 11) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}$;
- 12) $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$;

$$13) \cos(2 \arccos x) = \arcsin(\cos x);$$

$$14) \sin(2 \operatorname{arctg} x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = 1;$$

$$15) \arccos(4x - 3) = 3 \arccos x;$$

$$16) \arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36}.$$

Решение тренировочной работы 18

1. Вычислите:

$$1) \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} 5) = 5 - \pi k, \text{ где } \pi k < 5 < \pi + \pi k, \text{ что верно при } k = 1; \quad \pi < 5 < 2\pi, \text{ значит } \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} 5) = \boxed{5 - \pi}.$$

$$2) \operatorname{arcsin}(\sin(-3)) =$$

$$= \begin{cases} -3 - 2\pi k, & \text{где } 2\pi k \leq -3 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi + 3 + 2\pi k, & \text{где } \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -3 \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $-3 \in \left[-1,5\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ верно, что возможно только во втором случае при $k = 1$,

$$\text{то } \operatorname{arcsin}(\sin(-3)) = \pi + 3 - 2\pi = \boxed{3 - \pi}.$$

Можно не запоминать формулы арс-функций.

$$\text{Пусть } y = \operatorname{arcsin}(\sin(-3)), \text{ тогда } \begin{cases} \sin y = \sin(-3) \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Так как из } \sin \alpha = \sin \beta \text{ следует } \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{cases},$$

$$\text{то } \begin{cases} \begin{cases} y = -3 + 2\pi k \\ y = \pi + 3 + 2\pi k \end{cases} \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

что верно только для $y = \pi + 3 + 2\pi k$ при $k = -1$;

$$\begin{cases} y = 3 - \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ т.е. } \boxed{\operatorname{arcsin}(\sin(-3)) = 3 - \pi}.$$

$$3) \operatorname{arccos}(\cos 6) = \begin{cases} 6 - 2\pi k, & \text{где } 2\pi k \leq 6 \leq (2k+1)\pi \\ -6 + 2\pi k, & \text{где } (2k-1)\pi \leq 6 \leq 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $6 \in [\pi; 2\pi]$ верно, что возможно только во втором случае при $k = 1$, значит $\operatorname{arccos}(\cos 6) = \boxed{-6 + 2\pi}$.

Можно рассуждать иначе.

Пусть $y = \arccos(\cos 6)$, то $\begin{cases} \cos y = \cos 6 \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$.

Так как $\cos \alpha = \cos \beta$, равносильно $\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \end{cases}$,

$$\text{то } \begin{cases} y = 6 + 2\pi k \\ y = -6 + 2\pi k, \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

что верно только для $y = -6 + 2\pi k$ при $k = 1$,

$$\text{т. е. } \begin{cases} y = -6 + 2\pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}, \text{ тогда } \boxed{\arccos(\cos 6) = -6 + 2\pi}.$$

$$4) \arctg(\operatorname{tg}(-4)) = -4 - \pi k, \text{ где } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq -4 \leq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

что верно только при $k = -1$, тогда $-4 \in \left[-1,5; -\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{значит } \arctg(\operatorname{tg}(-4)) = \boxed{-4 + \pi}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \arcsin\left(\sin \frac{11}{7}\pi\right) = 3x + 1.$$

Так как $\frac{11}{7}\pi \in [1,5\pi; 2,5\pi]$,

то это первый случай при $k = 1$.

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{11}{7}\pi\right)\right) = \frac{11}{7}\pi - 2\pi,$$

$$\text{значит } 3x + 1 = -\frac{3}{7}\pi;$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{3} - \frac{\pi}{7}}.$$

$$2) \arccos\left(\cos \frac{17}{5}\pi\right) = 2 - 3x.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \arccos\left(\cos \frac{17\pi}{5}\right) &= \\ &= \begin{cases} \frac{17}{5}\pi - 2\pi k, & \text{где } 2\pi k \leq \frac{17}{5}\pi \leq (2k+1)\pi \\ -\frac{17}{5}\pi + 2\pi k, & \text{где } (2k-1)\pi \leq \frac{17}{5}\pi \leq 2\pi k \end{cases}, \end{aligned}$$

что верно во втором случае при $k = 2$,

$$\text{то } \arccos\left(\cos \frac{17}{5}\pi\right) = \frac{17}{5}\pi - 4\pi,$$

$$\text{тогда } \frac{17}{5}\pi - 4\pi = 2 - 3x; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{3}}.$$

$$3) \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = x + 3.$$

Так как $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = -4 - \pi k$, где $\pi k < -4 < \pi + \pi k$,

что верно при $k = -2$, то $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-4)) = 2\pi - 4$,

$$\text{значит } 2\pi - 4 = x + 3 \quad \boxed{x = 2\pi - 7}.$$

$$4) \arccos(\cos(-4)) = 2x - 1.$$

Так как $\arccos(\cos(-4)) =$

$$= \begin{cases} -4 - 2\pi k, & \text{где } 2\pi k \leq -4 \leq (2k+1)\pi \\ 4 + 2\pi k, & \text{где } (2k-1)\pi \leq -4 \leq 2\pi k \end{cases},$$

а это верно при $-4 \in [2\pi; -\pi]$ при $k = -1$ в первом случае, то $\arccos(\cos(-4)) = -4 + 2\pi$,

$$\text{тогда } -4 + 2\pi = 2x - 1; \quad \boxed{x = -1,5 + \pi}.$$

Можно решить и не помня формул для арг-функций.

$$\text{Пусть } y = \arccos(\cos(-4)), \text{ тогда } \begin{cases} \cos y = \cos(-4) \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}.$$

Так как если $\cos \alpha = \cos \beta$, то $\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = -\beta + 2\pi k \end{cases}$,

$$\text{значит } \begin{cases} y = -4 + 2\pi k \\ y = 4 + 2\pi k \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases},$$

что верно только для $y = -4 + 2\pi k$ при $k = 1$;

$$\begin{cases} y = -4 + 2\pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}, \text{ тогда } \arccos(\cos(-4)) = -4 + 2\pi,$$

а уравнение примет вид $-4 + 2\pi = 2x - 1$;

$$\boxed{x = -1,5 + \pi}.$$

$$5) \arctg(\tg 8) = 3 - 2x.$$

Так как $\arctg(\tg 8) = 8 - \pi k$, где $-\frac{\pi}{2} + \pi k \leq 8 \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$,

что верно при $k = 3$ ($8 \in [2,5\pi; 3,5\pi]$),

то $\arctg(\tg 8) = 8 - 3\pi$, значит $8 - 3\pi = 3 - 2x$;

$$\boxed{x = -2,5 + 1,5\pi}.$$

$$6) \arcc tg \left(\ctg \left(\frac{11}{5}\pi \right) \right) = 3x + 4.$$

Так как $\arctg \left(\ctg \frac{11}{5}\pi \right) = \frac{11}{5}\pi$,

где $-\frac{\pi}{2} + \pi k \leq \frac{11}{5}\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$,

что верно при $k = 2$ ($\frac{11}{5}\pi \in [1,5\pi; 2,5\pi]$),

то $\arctg \left(\frac{11}{5}\pi \right) = \frac{11}{5} - 2\pi$,

$$\text{значит } \frac{11}{5}\pi - 2\pi = 3x + 4; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{15} - \frac{4}{3}}.$$

$$7) \operatorname{arctg}(2 \sin^2 x - \sin x) = \frac{\pi}{4}.$$

Так как углы равны, то котангенсы этих углов равны,

$$\text{т. е. } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(2 \sin^2 x - \sin x)) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4};$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 1; \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) \operatorname{arctg}(3 \cos^3 2x + 4 \cos 2x) = \frac{3}{4}\pi.$$

С одной стороны, взяв тангенс обеих частей уравнения

$$\text{получим } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(3 \cos^3 2x + 4 \cos 2x)) = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi;$$

$$3 \cos^3 2x + 4 \cos 2x = -1; \quad \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Но увы, это *ошибочное* решение.

Так как $\operatorname{arctg} \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а $\frac{3}{4}\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то данное уравнение корней не имеет.

$$9) \arccos(\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} x)) = 0.$$

По определению это значит, что $\operatorname{ctg}(2 \operatorname{arctg} x) = 1$.

$$\text{Тогда } \frac{1}{\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x)} = 1; \quad \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = 1;$$

$$\text{так как } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ то } \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = 1;$$

$$\frac{2x}{1 - x^2} = 1; \quad x^2 + 2x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1};$$

$$\boxed{x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}}.$$

$$10) \operatorname{arctg}(2x^2 + x) + \operatorname{arctg}(2x^2 - x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x^2 + x) + \operatorname{arctg}(2x^2 - x)) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\text{то } \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x^2 + x)) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x^2 - x))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x^2 + x)) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2x^2 - x))} = 1;$$

$$\frac{2x^2 + x + 2x^2 - x}{1 - (2x^2 + x)(2x^2 - x)} = 1; \quad \frac{4x^2}{1 - 4x^2 + x^2} = 1;$$

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0; \quad \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \emptyset \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}.$$

$$11) \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{а) Пусть } x = \operatorname{tg} \alpha, \text{ тогда } \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha;$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha;$$

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Значит

$$\arccos(\cos 2\alpha) + \arcsin(\sin 2\alpha) + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\alpha) = \frac{3}{2}\pi$$

один из возможных вариантов.

$$\left. \begin{aligned} \arccos(\cos(2\alpha)) &= 2\alpha \\ \arcsin(\sin(2\alpha)) &= 2\alpha \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2\alpha)) &= 2\alpha \end{aligned} \right\},$$

$$\text{тогда } 2\alpha + 2\alpha + 2\alpha = \frac{3}{2}\pi; \quad \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{значит } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = x = 1.$$

б) Можно доказать, что

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}, \text{ тогда}$$

$$2\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{3}{2}\pi; \quad \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2x}{1+x^2} = 1;$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0; \quad x = 1.$$

Но внимание! $x = 1 \notin D(y)$ — корней нет.

$$12) \operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg} \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}(1 + \cos x)) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4};$$

$$\left(\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \right);$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2 + \cos x)) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1 + \cos x))}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2 + \cos x)) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1 + \cos x))} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{2 + \cos x - 1 - \cos x}{1 + (2 + \cos x) \cdot (1 + \cos x)} = 1;$$

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x + 3 \cos x + 2} = 1;$$

$$\cos^2 x + 3 \cos x + 3 = 1; \quad \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \cdot \boxed{x = \pi + 2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$13) \cos(2 \arccos x) = \arcsin(\cos x).$$

$$\text{Так как } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$\text{то } \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

$$\text{Так как } \arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{то } \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x),$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x;$$

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi k; & 2\pi k \leq x \leq (2k+1)\pi \\ -x + 2\pi k; & (2k-1)\pi \leq x \leq 2\pi k \end{cases}.$$

- а) При $k=0$ $0 \leq x \leq \pi$ (первый случай), но $-1 \leq x \leq 1$ (условие существования $\arccos x$), значит на $[0; 1]$ $\arccos(\cos x) = x$,

$$\text{тогда } 2x^2 - 1 = \frac{\pi}{2} - x; \quad 4x^2 + 2x - 2 - \pi = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8+4\pi}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+4\pi}}{4},$$

$$\text{но } \frac{-1 - \sqrt{9+4\pi}}{4} \notin [0; 1]; \quad \frac{\sqrt{9+4\pi} - 1}{4} \in [0; 1].$$

- б) Во втором случае при $k=0$ $-\pi \leq x \leq 0$,

$$\text{т.е. на } [-1; 0] \quad \arccos(\cos x) = -x,$$

$$\text{значит } 2x^2 - x = \frac{\pi}{2} + x;$$

$$4x^2 - 2x - 2 - \pi = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9+4\pi}}{4};$$

$$\frac{1 + \sqrt{9+4\pi}}{4} \notin [-1; 0]; \quad \frac{1 - \sqrt{9+4\pi}}{4} \in [-1; 0].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\sqrt{9+4\pi} - 1}{4}; \frac{1 - \sqrt{9+4\pi}}{4} \right\}.$$

$$14) \sin(2 \operatorname{arctg} x) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = 1.$$

$$\text{Так как } \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\text{то } \sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$\text{тогда } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x}; \quad \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

$$1 + x^2 = 2; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \{-1; 1\}.$$

$$15) \arccos(4x - 3) = 3 \arccos x.$$

$$\begin{aligned} \cos(\arccos(4x - 3)) &= \cos(3 \arccos x); & 4x - 3 &= 4x^3 - 3x; \\ (\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha); & 4x^3 - 7x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} -\frac{4x^3}{4x^3 - 4x^2} - \frac{7x + 3}{4x^2 - 4x} & \frac{x - 1}{4x^2 + 4x - 3} \\ \hline -\frac{4x^2}{4x^2 - 4x} - \frac{7x}{4x^2 - 4x} & \\ \hline & -\frac{3x + 3}{-3x + 3} \\ \hline & \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4} = \frac{-2 \pm 4}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \notin [-1; 1] \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Ответ: $\{0, 5; 1\}$.

$$16) \arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36}.$$

$$\text{Так как } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{то } \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x \right)^2 + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36};$$

$$\frac{\pi^2}{4} - \pi \arccos x + \arccos^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36};$$

$$72 \arccos^2 x - 36\pi \arccos x + 4\pi^2 = 0;$$

$$18 \arccos^2 x - 9\pi \arccos x + \pi^2 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \arccos x = \frac{\pi}{3} \\ \arccos x = \frac{\pi}{6} \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right].$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Практикум 16

1. Решите неравенства:

$$1) \cos x > \frac{1}{2};$$

$$2) \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$3) \cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4) \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5) \sin 3x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$6) \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) > -\frac{1}{2} \text{ на } [0; \pi];$$

$$7) \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$8) \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$9) \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \geq 1;$$

$$10) \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) < -\sqrt{3} \text{ на } \left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8} \right];$$

$$11) \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) > -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$12) \operatorname{ctg} \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) \leq \sqrt{3};$$

$$13) \cos \left(3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$14) \sin \left(\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) > -\frac{1}{2}.$$

2. Решите неравенства:

1) $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos x < \frac{\pi}{3}$;

3) $\arcsin 2x > \arccos x$;

4) $\arccos(8x^2 - 5x) < 2 \arccos x$;

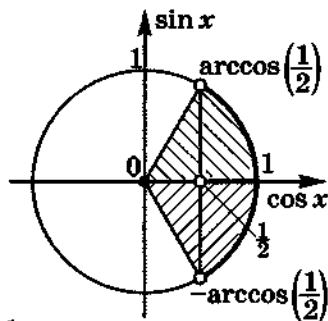
5) $\operatorname{arccotg} x < \arccos 2x$;

6) $2 \operatorname{arctg} x > \arcsin x$.

Решение практикума 16

1. Решите неравенства:

1) $\cos x > \frac{1}{2}$.

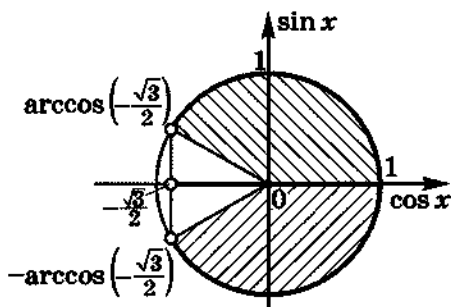


$$-\arccos \frac{1}{2} + 2\pi k < x < \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \forall k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



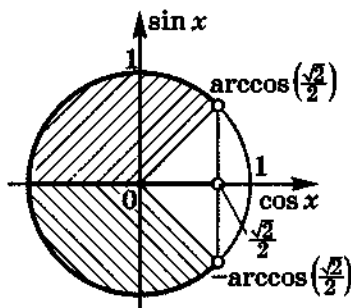
$$-\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k < x < \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Так как $\arccos(-m) = \pi - \arccos m$, то

$$-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k < x < \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$3) \cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

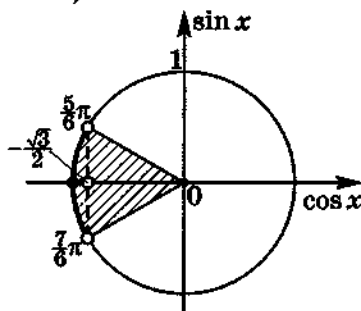


$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k \right) \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$4) \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{6} < 2\pi - \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k.$$

$$\text{Так как } \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{то } -\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{5\pi}{6};$$

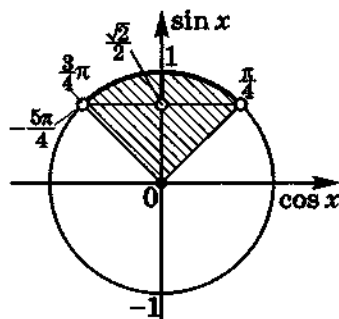
$$\frac{5\pi}{6} < \alpha < -\frac{5\pi}{6} \text{ — ложь, значит}$$

$$\frac{5\pi}{6} < \alpha < -\frac{5\pi}{6} + 2\pi; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \pi + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \sin 3x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

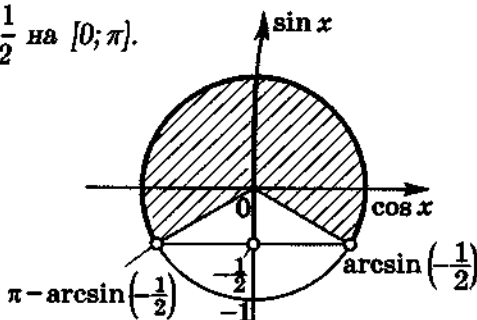


$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k < 3x < \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2\pi}{3}k < x < \frac{3\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2\pi}{3}k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) > -\frac{1}{2} \text{ на } [0; \pi].$$



$$\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{3} < \pi - \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + 2\pi k.$$

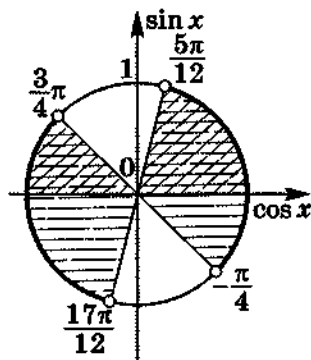
Так как $\arcsin(-m) = -\arcsin m$, то

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{3} < \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;$$

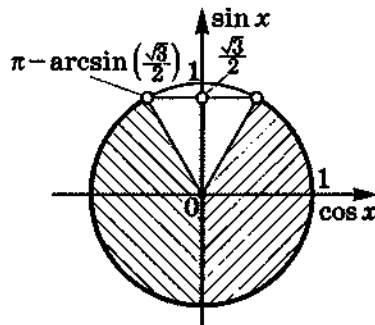
$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k.$$

Учтем, что $x \in [0; \pi]$.



Ответ: $\left[0; \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

7) $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \alpha < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \text{ложь.}$$

Тогда

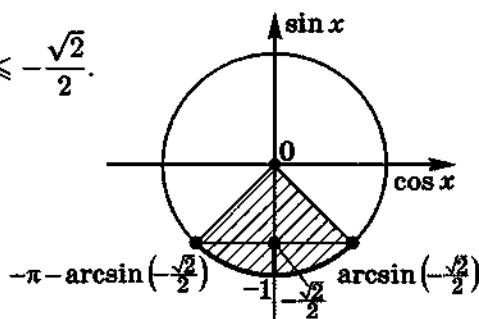
$$\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\pi < \alpha < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2\pi k - \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} < 2x < \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k;$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$8) \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



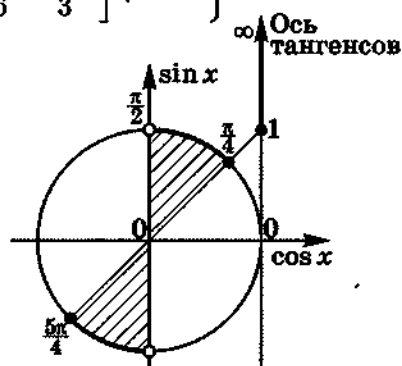
$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k;$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$-\frac{5\pi}{12} + 2\pi k \leq 3x \leq \frac{\pi}{12} + 2\pi k; \quad -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}k \leq x \leq \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left[-\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1.$$



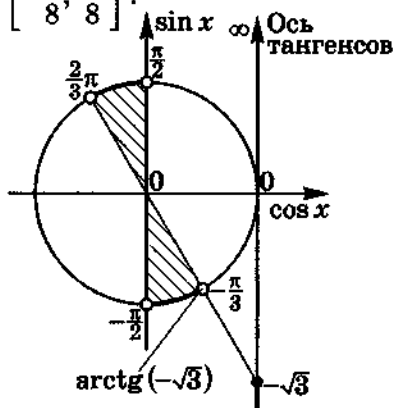
$$\frac{\pi}{2} + \pi k > 2x + \frac{\pi}{3} \geq \operatorname{arctg} 1 + \pi k;$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k > 2x + \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \frac{\pi}{6} + \pi k > 2x \geq -\frac{\pi}{12} + \pi k;$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k > x \geq -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left[-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3} \text{ на } \left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right].$$



$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k > 2x - \frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Так как $\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m$,

$$-\frac{\pi}{3} + \pi k > 2x - \frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{2} + \pi k;$$

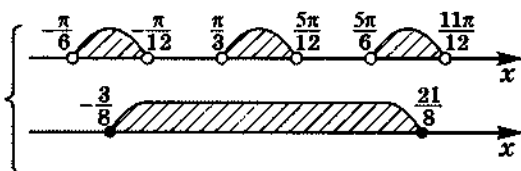
$$-\frac{\pi}{6} + \pi k > 2x > -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} > x > -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2};$$

$$\text{но } x \in \left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right].$$

$$\text{а) } -\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{8} < -\frac{\pi}{12};$$

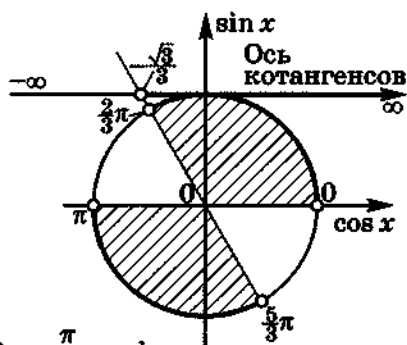
$$\pi > 3, \text{ тогда } -\frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{8} < -\frac{3}{8} < -\frac{\pi}{12};$$

$$\text{б) } \frac{5\pi}{6} < \frac{7\pi}{8} < \frac{11\pi}{12}; \quad \frac{11\pi}{8} > \frac{7\pi}{8} > \frac{21}{8} > \frac{5\pi}{6}.$$



$$\text{Ответ: } \left[-\frac{3}{8}; -\frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\frac{5}{8}\right].$$

$$11) \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



$$\operatorname{arccotg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \pi k > 2x - \frac{\pi}{4} > \pi k.$$

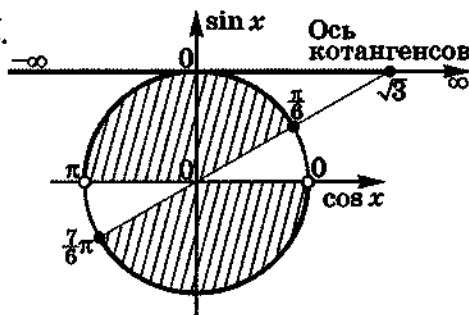
Так как $\operatorname{arccotg}(-m) = \pi - \operatorname{arccotg} m$,

$$\pi - \operatorname{arccotg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \pi k > 2x - \frac{\pi}{4} > \pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \pi k > 2x > \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k > x > \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$12) \operatorname{ctg} \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) \leq \sqrt{3}.$$



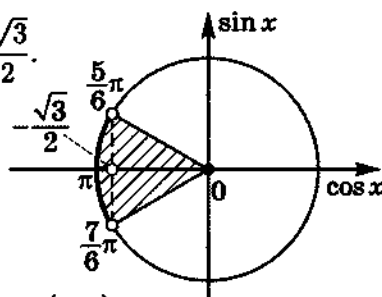
$$\pi + \pi k > 3x + \frac{\pi}{3} \geq \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi k;$$

$$\pi + \pi k > 3x + \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad \frac{2\pi}{3} + \pi k > 3x \geq -\frac{\pi}{6} + \pi k;$$

$$\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k > x \geq -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k.$$

Ответ: $\left\{ \left[-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k; \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$13) \cos \left(3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k < \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k.$$

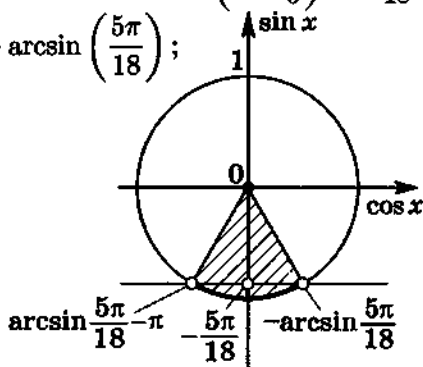
$$a) k = -1;$$

$$\frac{5\pi}{18} - \frac{2\pi}{3} < \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{7\pi}{18} - \frac{2\pi}{3};$$

$$-\frac{7\pi}{18} < \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < -\frac{5\pi}{18}; \text{ но}$$

$$-\frac{7\pi}{18} < -1, \text{ а } -\frac{5\pi}{18} > -1, \text{ значит } \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < -\frac{5\pi}{18};$$

$$\arcsin \left(-\frac{5\pi}{18} \right) = -\arcsin \left(\frac{5\pi}{18} \right);$$



$$\arcsin \frac{5\pi}{18} - \pi + 2\pi n < x - \frac{\pi}{6} < -\arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi n;$$

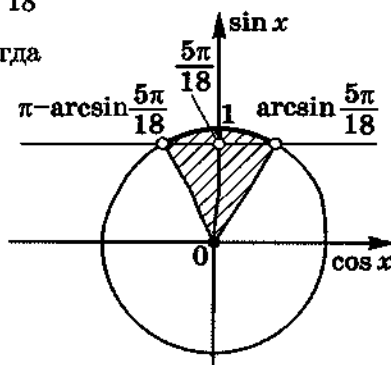
$$\arcsin \frac{5\pi}{18} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}.$$

6) $k = 0$;

$$\frac{5\pi}{18} < \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{7\pi}{18};$$

$$\frac{7\pi}{18} > 1, \text{ а } \frac{5\pi}{18} < 1, \text{ тогда}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{5\pi}{18};$$



$$\pi - \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p > x - \frac{\pi}{6} > \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p;$$

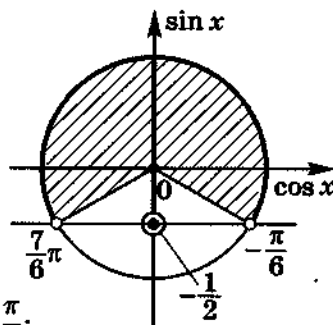
$$\frac{7\pi}{6} - \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p > x > \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p.$$

При остальных значениях $k \in \mathbb{Z}$ решения нет.

Ответ:

$$\left\{ \left(\arcsin \frac{5\pi}{18} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi n \right); \right. \\ \left. \left(\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p; \frac{7\pi}{6} - \arcsin \frac{5\pi}{18} + 2\pi p \right) \mid n, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$14) \sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}.$$



$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k > \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{При } k=0 \quad \frac{7\pi}{6} > \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\pi}{6},$$

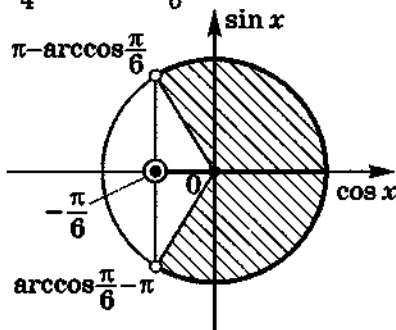
$$\text{но } \frac{7\pi}{6} > 1, \text{ а } -1 < -\frac{\pi}{6} < 1, \text{ тогда } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\pi}{6};$$

$$\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi - \arccos\frac{\pi}{6};$$

$$-\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \arccos\frac{\pi}{6} - \pi, \text{ значит}$$

$$\pi - \arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n > x + \frac{\pi}{4} > \arccos\frac{\pi}{6} - \pi + 2\pi n;$$

$$\frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n > x > \arccos\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4} + 2\pi n.$$



При других $k \in \mathbb{Z}$ решения нет.

Ответ:

$$\left\{ \left(\arccos\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} - \arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Решите неравенства:

$$1) \arctg x > \frac{\pi}{6}.$$

$$y = \arctg x \uparrow; \quad D(y) = (-\infty; \infty); \quad E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \tg x \uparrow, \text{ тогда } \tg(\arctg x) > \tg \frac{\pi}{6}; \quad x > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right).$$

$$2) \arccos x < \frac{\pi}{3}.$$

$$y = \arccos x \downarrow; \quad D(y) = [-1; 1]; \quad E(y) = [0; \pi];$$

$$\cos(\arccos x) > \cos \frac{\pi}{3}; \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$3) \arcsin 2x > \arccos x.$$

$$y_1 = \arcsin 2x; \quad D(y_1) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \quad E(y_1) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y_2 = \arccos x; \quad D(y_2) = [-1; 1]; \quad E(y_2) = [0; \pi].$$

Неравенство, возможно, выполняется только при $x \in D(H)$, где $D(H) = D(y_1) \cap D(y_2)$.

$$\text{Тогда } E(y_1) \cap E(y_2) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{т.е. если } \arcsin 2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \subset [0; \pi],$$

$$\text{тогда } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ с учетом } D(H) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Значит } \arccos x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \left(\arccos 0 = \frac{\pi}{2}; \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{На } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad y = \sin x \uparrow,$$

$$\text{значит } \sin(\arcsin 2x) > \sin(\arccos x);$$

$$\begin{cases} 2x > \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 > 1-x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x > \frac{\sqrt{5}}{5} \\ x < -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \end{cases}.$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{1}{2}\right].$$

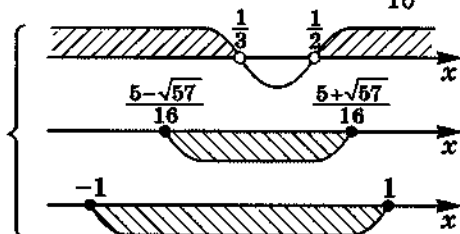
$$4) \arccos(8x^2 - 5x) < 2 \arccos x.$$

$y = \cos x \downarrow$ на $[0; \pi]$, тогда

$$\cos(\arccos(8x^2 - 5x)) > \cos(2 \arccos x);$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 5x > 2x^2 - 1 \\ -1 \leq 8x^2 - 5x \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 > 0 \\ 8x^2 - 5x - 1 \leq 0 \\ 8x^2 - 5x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad (\forall x);$$

$$8x^2 - 5x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{16}.$$



$$\text{Ответ: } \left[\frac{5 - \sqrt{57}}{16}; \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5 + \sqrt{57}}{16} \right].$$

$$5) \operatorname{arccotg} x < \arccos 2x.$$

$$D(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]; \quad y = \operatorname{ctg} x \downarrow \text{ на } (0; \pi);$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) > \operatorname{ctg}(\arccos 2x);$$

$$x > \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (\text{см. табл. на стр. 301}).$$

$$\begin{cases} x(\sqrt{1-4x^2} - 2) > 0 \\ x \neq \pm \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \end{cases}; \quad \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \\ x > 0 \\ \sqrt{1-4x^2} > 2 \\ x < 0 \\ \sqrt{1-4x^2} < 2 \\ x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \end{cases};$$

$$\left[\begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ x > 0 \\ 1 - 4x^2 > 4 \\ x < 0 \\ 1 - 4x^2 > 0 \\ 1 - 4x^2 < 4 \\ x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \end{cases} ; \quad \left[\begin{cases} x > 0 \\ x^2 < -\frac{3}{4} \\ x < 0 \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ x^2 > -\frac{3}{4} \end{cases} \right] \quad -\frac{1}{2} < x < 0$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

6) $2 \operatorname{arctg} x > \arcsin x$.

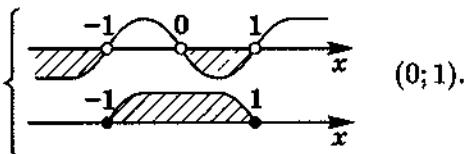
$$y = \sin x \uparrow \text{ на } \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) > \sin(\arcsin x);$$

$$\begin{cases} \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} > x, \text{ так как } \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} \geq x; \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{x(1+x^2-2)}{1+x^2} < 0; \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)(x-1) < 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Ответ: $(0; 1)$.

Тренировочная работа 19**1. Вычислите:**

- 1) $\frac{1}{\pi} \arcsin \left(\cos \frac{33\pi}{5} \right);$
- 2) $\cos (2 \operatorname{arctg} 2) - \sin (4 \operatorname{arctg} 3);$
- 3) $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right);$
- 4) $\frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) + \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \right];$
- 5) $\sin^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2) \right];$
- 6) $\sin^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) \right];$
- 7) $7 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) \right];$
- 8) $\frac{3}{\pi} \left(\arcsin \frac{11}{14} + \arcsin \frac{13}{14} \right);$
- 9) $\frac{1}{\pi} \left(\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$ при $x > 0;$
- 10) $\frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)$ при $x < -1.$

2. Решите уравнения:

- 1) $\operatorname{arctg} 7 + \arcsin x = \frac{\pi}{4};$
- 2) $\arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3};$
- 3) $\arccos x = 2 \arccos (x\sqrt{3});$
- 4) $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x;$

$$5) 2 \arccos \frac{x}{2} = \arccos(3 - x);$$

$$6) 2 \arcsin x = \arccos(2x\sqrt{1-x^2});$$

$$7) \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2};$$

$$8) \operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(5 \operatorname{arctg} x).$$

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

$$1) y = \frac{1}{\pi} (2 \arccos x - \arccos(2x^2 - 1));$$

$$2) y = \frac{2}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \right);$$

$$3) y = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin 2x - \arcsin \frac{2x + \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Решение тренировочной работы 19

1. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\cos \frac{33\pi}{5} \right) = \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \left(\cos \frac{33\pi}{5} \right) \leq \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \arcsin \left[\cos \left(6\pi + \frac{3\pi}{5} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \arcsin \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \arcsin \left(-\sin \frac{\pi}{10} \right) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{10} = \boxed{-0,1}.
 \end{aligned}$$

$$2) \cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3).$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) Пусть } \operatorname{arctg} 2 = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = 2; \\
 \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) Пусть } \operatorname{arctg} 3 = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = 3; \\
 \sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta; \\
 \sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{3}{5}; \\
 \cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5}; \\
 \sin 4\beta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{24}{25}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = \\
 = -\frac{3}{5} - \left(-\frac{24}{25} \right) = \frac{24 - 15}{25} = \frac{9}{25} = \boxed{0,36}.
 \end{aligned}$$

$$3) \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right).$$

$$\text{а) } \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

б) Пусть $\arcsin \frac{15}{17} = \alpha$; $\sin \alpha = \frac{15}{17}$; $\alpha \in I$ четверти;

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right) &= \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = \boxed{0,48}. \end{aligned}$$

$$4) \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) + \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \right].$$

а) Пусть $\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) = \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) = \beta$; $\operatorname{tg} \beta = -\frac{4}{3}$.

$$\text{в) } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{-\frac{3}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-\frac{25}{12}}{\frac{12-12}{12}} = -\frac{25}{0}.$$

Значит $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ не определен, т. е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ или

$$\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}.$$

Но $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, значит подходит

только $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$.

$$\text{г) } \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4} \right) + \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \boxed{-1}.$$

$$5) \sin^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2) \right].$$

$$\text{Пусть } \arcsin \frac{4}{5} = \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg}(-2) = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = -2; \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < 0;$$

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$a) \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{значит } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$б) \sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot (-2)}{1 + (-2)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

$$в) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$г) \sin^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2) \right] = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \boxed{0,2}.$$

$$6) \sin^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) \right].$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) = \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}; \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < 0;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \sin \alpha > 0;$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < 0; \quad \sin \beta < 0;$$

$$\sin \beta = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{б) } \cos \beta = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}; \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < 0; \quad \cos \beta > 0;$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \cos \alpha > 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{50}}{50} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{г) } \sin^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \boxed{0,5}.$$

$$\text{7) } 7 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) \right].$$

$$\text{Пусть } \arccos \frac{2}{7} = \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{2}{7}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{a) } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \quad (\sin \alpha > 0);$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{2}{7}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{-1 + \frac{\sqrt{5}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} + 3} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} - 3)^2}{5 - 9} = -\frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = -\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{-1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) &= -\frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \\ &= -\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4} = -\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) &= \\ = -\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} &= -7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } 7 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{7} \right) \right] &= \\ = \boxed{-49}. \end{aligned}$$

$$8) \frac{3}{\pi} \left(\arcsin \frac{11}{14} + \arcsin \frac{13}{14} \right).$$

$$а) \text{ Пусть } \arcsin \frac{11}{14} = \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{11}{14}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin \frac{13}{14} = \beta; \quad \sin \beta = \frac{13}{14}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$б) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{тогда } \sin(\alpha + \beta) = \frac{11}{14} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} + \frac{13}{14} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{98\sqrt{3}}{14^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Если } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \text{ или } \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3},$$

по так как

$$\sin \alpha = \frac{11}{14} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } \alpha > \frac{\pi}{4}, \text{ и}$$

$$\sin \beta = \frac{13}{14} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } \beta > \frac{\pi}{4}, \text{ то } \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Итак, } \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$в) \frac{3}{\pi} \left(\arcsin \frac{11}{14} + \arcsin \frac{13}{14} \right) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \boxed{2}.$$

$$9) \frac{1}{\pi} \left(\arcsin x - \arcsin \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2}} \right) \text{ при } x > 0.$$

$$а) \text{ Пусть } \arcsin x = \alpha; \quad \sin \alpha = x; \quad \text{так как } x > 0, \text{ то}$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \cos \alpha \geq 0, \quad \text{так как } \frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0.$$

б) Пусть $\arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \beta$; $\sin \beta = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$.

Учитывая предыдущие обозначения, получим

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{\sin \alpha - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2}} = \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).\end{aligned}$$

Тогда $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$;

так как $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \beta \geq 0$,

т.е. $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$.

в) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta =$

$$= \sin \left(\alpha - \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда
$$\begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \\ \alpha - \beta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}.$$

1. Проверим: $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$, значит $\alpha = \frac{3\pi}{4} + \beta$,

т.е. $0 < \frac{3\pi}{4} + \beta \leq \frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{4} < \beta \leq -\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $-\frac{3\pi}{4} < \arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leq -\frac{\pi}{4}$.

Учитывая, что $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастающая, получим

$$\sin \left(\arcsin \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2} \right) \leq \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right);$$

$$\frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$г) \ 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\alpha + \arcsin(\sin 2\alpha).$$

Учитывая, что $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x - 2\pi k, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

и $-\pi < 2\alpha < -\frac{\pi}{2}$, нам подходит только второй случай при $k = -1$, т. е. $\arcsin(\sin \alpha) = \pi - \alpha - 2\pi$.

Следовательно, в данном случае

$$\arcsin(\sin 2\alpha) = -\pi - 2\alpha, \text{ т. е.}$$

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\alpha - \pi - 2\alpha = -\pi.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot (-\pi) = \boxed{-1}$$

при $x < -1$.

Для вычисления можно использовать производную. Действительно, так как

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ и } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - (2x)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} \right), \end{aligned}$$

но $x < -1$, тогда $|1-x^2| = -(1-x^2)$.

$$y' = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+x^2} - 21 + x^2 \right) = 0, \text{ т. е. } y = \text{const.}$$

Выберем для удобства $x = -\sqrt{3} < -1$;

$$\begin{aligned} y(-\sqrt{3}) &= \frac{1}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin \left(\frac{-2\sqrt{3}}{1+3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -1. \end{aligned}$$

2. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{arctg} 7 + \arcsin x = \frac{\pi}{4}; \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 7;$$

так как $0 < \operatorname{arctg} 7 < \frac{\pi}{2}$, то $0 > -\operatorname{arctg} 7 > -\frac{\pi}{2}$. $\left(+\frac{\pi}{4} \right)$

Получим $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 7 > -\frac{\pi}{4}$, но $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$,

т. е. $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 7 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, а значит не выходит из области изменения $y = \arcsin m$.

$$\text{Тогда } \sin(\arcsin x) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 7 \right);$$

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

$$\text{Вычислим } \sin \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 7 \right) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos(\operatorname{arctg} 7) - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\operatorname{arctg} 7).$$

Напомним:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{arctg} 7 \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ т. е. } \sin \alpha > 0, \quad \cos \alpha > 0.$$

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arctg} 7) &= \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 7)}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} 7)}} = \frac{7}{\sqrt{1 + 7^2}} = \\ &= \frac{7\sqrt{50}}{50} = \frac{7\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

$$\sin(\operatorname{arccotg} 7) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arccotg} 7)}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccotg} 7\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \\ &= \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = 0,6, \text{ т.е. } x = 0,6. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 0,6$.

$$2) \arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\arccos 2x = \frac{\pi}{3} - \arccos x, \text{ тогда}$$

$$\cos(\arccos 2x) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos(\arccos x) + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin(\arccos x);$$

$$2x = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{1-x^2}); \quad (\text{см. табл. на стр. 301})$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-x^2};$$

$$\begin{cases} \frac{9}{4}x^2 = \frac{3}{4}(1-x^2) & 4x^2 = 1; \\ x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}; & x = \frac{1}{2}. \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Проверим.

$$\text{При } x = \frac{1}{2} \quad \arccos \frac{1}{2} + \arccos 1 = \frac{\pi}{3};$$

$$\frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \text{ истина.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}.$$

$$3) \arccos x = 2 \arccos (x\sqrt{3}).$$

$$\cos(\arccos x) = \cos(2 \arccos (x\sqrt{3}));$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1} \quad (5.2)$$

$$x = 2(\cos^2(\arccos(x\sqrt{3}))) - 1;$$

$$x = 2(x\sqrt{3})^2 - 1;$$

$$6x^2 - x - 1 = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Проверим.

$$a) x = \frac{1}{2}; \quad \arccos \frac{1}{2} = 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \text{ — истина.}$$

$$b) x = -\frac{1}{3}; \quad \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

$$\pi - \arccos \frac{1}{3} = 2 \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ — ложь, так как}$$

$$\begin{cases} \pi - \arccos \frac{1}{3} < \pi \\ 2 \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) > \pi \quad \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}.$$

Примечание. Вопросы равносильности преобразований для уравнений, содержащих аргс-функции, довольно трудны, поэтому прямая проверка бывает более эффективной и простой.

$$4) \operatorname{arccctg}(x-1) + \operatorname{arccctg} x + \operatorname{arccctg}(x+1) = \operatorname{arccctg} 3x.$$

$$\operatorname{arccctg}(x-1) + \operatorname{arccctg}(x+1) = \operatorname{arccctg} 3x - \operatorname{arccctg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \text{ при } \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \beta \neq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \text{ при } \begin{cases} \sin(\alpha - \beta) \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \beta \neq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(x-1) + \operatorname{arccctg}(x+1)) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} 3x - \operatorname{arccctg} x);$$

$$\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(x-1)) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(x+1)) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(x-1)) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg}(x+1))} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} 3x) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} x) + 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} x) - \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} 3x)},$$

$$\text{тогда } \frac{(x-1)(x+1) - 1}{x-1+x+1} = \frac{3x \cdot x + 1}{x-3x}; \quad \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{3x^2 + 1}{-2x};$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 3x^2 + 1 + x^2 - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Проверка:

$$a) x = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arccctg} \frac{3}{2} = \operatorname{arccctg} \frac{3}{2};$$

$$\pi - \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arccctg} \frac{3}{2} = \operatorname{arccctg} \frac{3}{2};$$

$$\pi + \operatorname{arccctg} \frac{3}{2} = \operatorname{arccctg} \frac{3}{2} - \text{ложь.}$$

$$б) x = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\pi + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{2}\right) = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{2}\right) - \text{ложь.}$$

Ответ: $\emptyset$.

$$5) \ 2 \arccos \frac{x}{2} = \arccos(3-x).$$

$$\cos \left(2 \arccos \frac{x}{2} \right) = \cos (\arccos(3-x));$$

$$2 \cos^2 \left(\arccos \frac{x}{2} \right) - 1 = 3-x;$$

$$2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 1 = 3-x; \quad \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0;$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0; \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Рассмотрим } D(Y): \quad \begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1 \\ |3-x| \leq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ x-3 \leq 1 \\ x-3 \geq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}; \quad x = 2.$$

Получили $D(Y) = 2$. Проверкой $x = 2$ подтверждаем, что это корень.

Ответ: $x = 2$.

Примечание. Если бы мы догадались сразу установить $D(Y)$, то решение было бы значительно проще.

$$6) \ 2 \arcsin x = \arccos(2x\sqrt{1-x^2}).$$

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos(\arccos(2x\sqrt{1-x^2}));$$

$$1 - 2 \sin^2(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2};$$

$$1 - 2x^2 = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Чтобы решать дальше, проанализируем ситуацию.

Так как $\pi \geq \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$, то

$$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin x \geq 0, \text{ значит } x \in [0; 1], \text{ тогда на } [0; 1]$$

$$1 - 2x^2 = 2x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - 4x^2 + 4x^4 = 4x^2 - 4x^4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

а) Очевидно, что $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \notin \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

б) Проверим $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$2 - \sqrt{2} \leq 2; \quad -\sqrt{2} \leq 0 \quad \text{— верно.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

7) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$. Выясним $D(Y)$:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 \leq 1 \end{cases}; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$\cos(\arcsin x) = \cos(\arccos \sqrt{1 - x^2});$$

так как $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin x \geq -\frac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x) \geq 0$.

$$\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}; \quad \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{— похоже, получили тождество на } [-1; 1].$$

Увы, мы ошиблись, так как может быть, что $\alpha \neq \beta$, а $\cos \alpha = \cos \beta$ (например, $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4}$).

Вернемся к исходному уравнению.

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Так как $\pi \geq \arccos(1 - x^2) \geq 0$, а $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin x \geq -\frac{\pi}{2}$,

то равенство в уравнении возможно только при

$$\arcsin x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{но тогда } x \in [0; 1], \quad \text{значит}$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} \quad \text{тождественно только на } [0; 1].$$

Ответ: $[0; 1]$.

Примечание. Если бы мы были более внимательны к тождествам в таблице, отражающей соотношения между аргс-функциями, то мы бы сразу использовали формулу 8.7. В данном случае мы ее просто доказали (см. стр. 300).

$$8) \operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(5 \operatorname{arctg} x).$$

Так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}\left(5\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\right);$$

$$\operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - 5 \operatorname{arctg} x\right);$$

$$\operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(5 \operatorname{arctg} x).$$

Если $5 \operatorname{arctg} x \neq \pm \frac{\pi}{2}$; $x \neq \pm \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right)$, то утверждение истинно.

Ответ: любое $x \neq \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$ есть решение данного уравнения.

3. Найдите $E(y)$ (область изменения функции):

$$1) y = \frac{1}{\pi} (2 \arccos x - \arccos(2x^2 - 1)) \quad E(y) = ?$$

Обозначим $\arccos x = \alpha \in [0; \pi]$, тогда $x = \cos \alpha$,

значит $2x^2 - 1 = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$. Известно, что

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k; & 2\pi k \leq 2\alpha \leq (2k+1)\pi \\ -2\alpha + 2\pi k; & (2k-1)\pi \leq \alpha \leq 2\pi k \end{cases}.$$

Так как $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$, то

а) на $[0; \pi]$ $\arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$ при $k = 0$ (первый случай), тогда на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $y(\alpha) = \frac{1}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0$.
 $(2\alpha \in [0; \pi]);$

б) на $[\pi; 2\pi]$ $\arccos(\cos 2\alpha) = -2\alpha + 2\pi n$ при $k = 1$

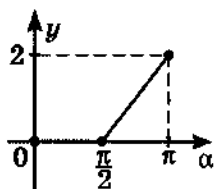
(второй случай), тогда на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$$y(\alpha) = \frac{1}{\pi}(2\alpha - (2\alpha + 2\pi)) = \frac{4\alpha - 2\pi}{\pi}; \quad (2\alpha \in [\pi; 2\pi]);$$

$y(\alpha) = \frac{4\alpha - 2\pi}{\pi}$ — возрастающая линейная функция относительно α , значит

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi}{\pi} = 0;$$

$$y(\pi) = \frac{4\pi - 2\pi}{\pi} = 2.$$



Т.е. $E(y) = [0; 2]$ на $[0; \pi]$.

Рассмотрим другой способ нахождения $E(y)$ для

$$y = \frac{1}{\pi}(2 \arccos x - \arccos(2x^2 - 1)).$$

Найдем $E(y)$, используя аппарат дифференциального исчисления.

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = (\arccos(2x^2 - 1))' = \frac{4x}{-2|x|\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} \right); \quad D(y) = [-1; 1].$$

а) на $x > 0$ $y' = 0$, т.е. $y = \text{const}$ на $(0; \infty)$;

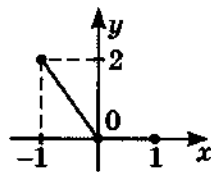
$$y(1) = \frac{1}{\pi}(2 \cdot 0 - 0) = 0.$$

б) на $x < 0$ $y' = -\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} < 0$; $y(\alpha) \downarrow$ (убывающая).

$$y(0) = \frac{1}{\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \right) = 0;$$

$$y(-1) = \frac{1}{\pi}(2 \cdot \pi - 0) = 2;$$

значит $E(y) = [0; 2]$ на $[-1; 1]$.



$$2) y = \frac{2}{\pi} \left(2 \operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \quad E(y) = ?$$

Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = x$,

причем $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{значит } \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha.$$

Отсюда следует, что $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arccos(\cos 2\alpha)$, где

$$\arccos(\cos 2\alpha) = \begin{cases} 2\alpha - 2\pi k, & 2\pi k \leq 2\alpha \leq 2\pi k + \pi \\ -2\alpha + 2\pi k, & (2k-1)\pi \leq 2\alpha \leq 2\pi k \end{cases}$$

Покажем, что это возможно.

а) в первом случае при $k=0$ $0 \leq 2\alpha \leq \pi$; $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$,

но по определению $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

значит на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\arccos(\cos 2\alpha) = 2\alpha$,

тогда на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ $y(\alpha) = \frac{2}{\pi}(2\alpha - 2\alpha) = 0$.

б) Во втором случае при $k=0$

$$-\pi \leq 2\alpha \leq 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0.$$

Учитывая, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$,

$$y(\alpha) = \frac{2}{\pi}(2\alpha - (-2\alpha)) = \frac{8\alpha}{\pi} -$$

возрастающая линейная функция.

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -4; \quad y(0) = 0.$$

Т.е. на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $E(y) = (-4; 0]$.

$$3) y = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin 2x - \arcsin \frac{2x + \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}} \right); \quad E(y) = ?$$

Пусть $\arcsin 2x = \alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin \alpha = 2x$,

$$\begin{aligned} \text{значит } \frac{2x + \sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sin \alpha + \sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha + |\cos \alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \left(\text{на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cos \alpha \geq 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } \arcsin \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \\ &= \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{4} - 2\pi k, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - \alpha \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, & \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \end{cases}, \end{aligned}$$

то рассмотрим при $k = 0$

$$\text{а) первый случай } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{т.е. } -\frac{3}{4}\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \text{ но } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{значит на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right] \arcsin \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \alpha + \frac{\pi}{4},$$

$$\text{тогда на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \arcsin \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

б) на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ будет находиться уже в условиях второго случая при $k = 0$.

Действительно, если $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$,

значит на $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}y(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \arcsin \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \\&= \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \frac{3}{4}\pi + \alpha \right) = \frac{1}{\pi} \left(2\alpha - \frac{3}{4}\pi \right).\end{aligned}$$

Так как $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \pi$, а значит

$$-\frac{\pi}{4} \leq 2\alpha - \frac{3}{4}\pi \leq \frac{\pi}{4}, \text{ т. е. } y(\alpha) \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right].$$

Подводя итоги, приходим к выводу, что для функции

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin 2x - \arcsin \frac{2x + \sqrt{1 - 4x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$E(y) = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right].$$

Системы тригонометрических уравнений**Практикум 17 (Системы уравнений)**

Решите системы:

$$1) \begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ x - y = \frac{4\pi}{3} \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = -\frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} \sin x - 2 \sin y = 0 \\ x - y = \frac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} 2 \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y = \frac{1}{2} \cos y \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} \cos x + \cos y = -\sqrt{3} \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Решение практикума 17 (Системы уравнений)

Решите системы:

$$1) \begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ x - y = \frac{4\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 0 \\ x - y = \frac{4\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \\ x = y + \frac{4\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \\ x = y + \frac{4\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \frac{4\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{y + y + \frac{4\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \frac{4\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} y + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = y + \frac{4\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} + \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{6} + \pi k \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{7\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{\pi}{3} - y - y}{2} = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases}; \quad \begin{cases} y - \frac{\pi}{6} = 2\pi n \quad (n = -k) \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} - 2\pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} - 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$3) \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x+y = -\frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x+y = -\frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x-y) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x+y = -\frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x+y = -\frac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos(x-y) = 0 \\ y = -x - \frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ y = -x - \frac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x+x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ y = -x - \frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \pi k \\ y = -x - \frac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \\ y = -x - \frac{\pi}{6} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \\ y = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{6} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \\ y = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$4) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sin(x+y) + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ y = x + \frac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y = \pi k \\ y = x + \frac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + x + \frac{3\pi}{4} = \pi k \\ y = x + \frac{3\pi}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \\ y = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k + \frac{3\pi}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \\ y = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$5) \begin{cases} \sin x - 2 \sin y = 0 \\ x - y = \frac{5\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \sin \left(y + \frac{5\pi}{3} \right) - 2 \sin y = 0 \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin y \cdot \cos \frac{5\pi}{3} + \cos y \cdot \sin \frac{5\pi}{3} - 2 \sin y = 0 \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y - 2 \sin y = 0 \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{3}{2} \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = y + \frac{5\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} + \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + \pi k \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(1,5\pi + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \begin{cases} 2 \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y = \frac{1}{2} \cos y \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \cos x = \frac{1}{2} \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - y \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos y + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin y; \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - y \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - y \right); \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{3} - y \right) = 0; \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ x = \frac{\pi}{3} - y \end{cases}; \quad \begin{cases} -y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} - \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} - \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) \begin{cases} \cos x + \cos y = -\sqrt{3} \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -\sqrt{3} \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Так как $y = \cos x$ — четная, то

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}; \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{3} \cos \frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}; \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1; \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k; \\ |x + y| = \frac{\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi + 4\pi k \\ \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ x + y = -\frac{\pi}{3} & \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{cases} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi + 4\pi k \\ 2y = \frac{\pi}{3} - 2\pi - 4\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi + 4\pi k \\ 2y = -\frac{\pi}{3} - 2\pi - 4\pi k \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \\ y = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ y = -\frac{7\pi}{6} - 2\pi k \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} - 2\pi k \right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{7\pi}{6} - 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Так как $y = \cos x$ — четная, то

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = \pi + 4\pi k \\ \begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ x - y = -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{cases};$$

$$\left[\begin{cases} x + y = \pi + 4\pi k \\ x - y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \end{matrix}; \right.$$

$$\left[\begin{cases} x + y = \pi + 4\pi k \\ x - y = -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k \\ 2y = \frac{\pi}{3} + 4\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k \\ 2y = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k \end{cases}; \right. \left[\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \right].$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right); \right.$
 $\left. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Практикум 18 (Системы уравнений)

Решите системы:

$$1) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \\ \sin y \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}; \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y; \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y; \\ 2 \sin x \cdot \cos(x - y) = \sin y; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 4x + 3 \cos x = 8y + 3 \cos 2y; \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x + \sqrt[4]{\sin \pi y} = 0 \\ (y^3 - xy - 6) \sqrt{4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\frac{1}{9}\right)^x} = 0; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sin^4 \pi x + \sqrt{1 + \cos \pi y} = 0 \\ (x^3 + y^2 + 2xy - 5) \sqrt{7 \cdot 2^{y+2} - 3 \cdot 4^y - 10} = 0. \end{cases}$$

Решение практикума 18 (Системы уравнений)

Решите системы:

$$1) \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \sin y \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} & \textcircled{1} - \textcircled{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k & \textcircled{1} + \textcircled{2}; \\ x-y = \pi n & \textcircled{1} - \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k + \pi n \\ 2y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}n \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{2}n \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k+n); (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k-n) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} & \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1; \\ \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1; \\ \cos(x+y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 2\pi k & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n & \textcircled{2} - \textcircled{1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2\pi k + \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n - 2\pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n + \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n - \pi k \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n+2k); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n-2k) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y & \textcircled{1} + \textcircled{2}; \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y & \textcircled{2} - \textcircled{1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y; \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos 2x = -\cos(x+y); \end{cases}; \quad \begin{cases} x-y = 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos(x+y); \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos(x+x-2\pi k); \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = -\cos 2x; \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = x - 2\pi k \\ \cos 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x - 2\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n - 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n-4k) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \textcircled{1} : \textcircled{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 1 \quad \left(\cos \frac{x-y}{2} \neq 0 \right);$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ т. е. } x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \cos x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi(k - n) \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n \end{cases}.$$

Ответ:

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} \mp \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2\pi(k - n) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y \\ 2 \sin x \cdot \cos(x - y) = \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y \\ \sin(x + x - y) + \sin(x - x + y) = \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y \\ \sin(2x - y) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y \\ 2x - y = \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 4x \\ y = 2x - \pi k \end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно решение уравнения

$$4 \operatorname{tg} 3x - 3 \operatorname{tg} 4x = 0. \quad 4 \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - 3 \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 0;$$

$$D(y): \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases};$$

$$4 \sin 3x \cdot \cos 4x - 3 \sin 4x \cdot \cos 3x = 0;$$

$$2 \sin 7x - 2 \sin x - 1,5 \sin 7x - 1,5 \sin x = 0;$$

$$\sin 7x - 7 \sin x = 0; \quad \sin 7x + \sin x - 8 \sin x = 0;$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos 3x - 8 \sin x = 0;$$

$$4 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 8 \sin x = 0;$$

$$8 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 8 \sin x = 0.$$

$$а) \sin x = 0; \quad x = \pi n, \text{ тогда } \begin{cases} x = \pi n \\ 2x - y = \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi n \\ y = 2\pi n - \pi k \end{cases};$$

$$б) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 1 = 0;$$

$$\frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 2x] \cdot \cos 2x - 1 = 0;$$

$$(2 \cos^2 2x - 1 + \cos 2x) \cdot \cos 2x - 2 = 0.$$

$$\text{Пусть } \cos 2x = t \in [-1; 1]; \quad 2t^3 + t^2 - t - 2 = 0;$$

$$f(1) = 0, \text{ тогда } 2(t-1)(t^2 + t + 1) + t(t-1) = 0;$$

$$(t-1)(2t^2 + 3t + 2) = 0; \quad \begin{cases} t = 1 \\ 2t^2 + 3t + 2 = 0 \quad (D < 0) \end{cases};$$

$$\cos 2x = 1; \quad 2x = 2\pi p; \quad x = \pi p.$$

Тогда решение совпадает со случаем а).

$$\text{Ответ: } \{(\pi n; 2\pi n - \pi k) \mid k, n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$6) \begin{cases} 4x + 3 \cos x = 8y + 3 \cos 2y \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases}.$$

$$\text{Пусть } f(x) = 4x + 3 \cos x; \quad f'(x) = 4 - 3 \sin x > 0,$$

значит функция f строго монотонная, а значит каждое свое значение принимает только один раз.

В правой части та же функция, только от $2y$. Получаем равенство $f(x) = f(2y)$. В силу монотонности это равенство равносильно

$$\begin{cases} x = 2y \\ 4x^2 - xy - 3 = x - y \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2y \\ 16y^2 - 2y^2 - 3 - y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 14y^2 - y - 3 = 0 \end{cases};$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{28} = \frac{1 \pm 13}{28}; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right) \right\}.$$

$$7) \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x + \sqrt[4]{\sin \pi y} = 0 \\ (y^3 - xy - 6) \sqrt{4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\frac{1}{9}\right)^x} = 0 \end{cases}$$

Так как $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \pi x \geq 0 \\ \sqrt[4]{\sin \pi y} \geq 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} \operatorname{tg} \pi x = 0 \\ \sin \pi y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \pi x = \pi k \\ \pi y = \pi n \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = k \\ y = n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } x, \text{ и } y - \text{целые числа.}$$

Из второго уравнения для существования корней необходимо

$$4 \cdot 3^{1-x} - 2 - \left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 0; \quad 12 \cdot 3^{-x} - 2 - 3^{-2x} \geq 0;$$

$$-(3^{-2x} - 12 \cdot 3^{-x} + 2) \geq 0; \quad (3^{-x}) = 6 \pm \sqrt{36 - 2} = 6 \pm \sqrt{34};$$

$$\frac{6 - \sqrt{34}}{3^{-x}} \quad \frac{6 + \sqrt{34}}{3^{-x}} \quad 6 + \sqrt{34} \geq 3^{-x} \geq 6 - \sqrt{34}.$$

$$\text{Учтем, что } 11 < 6 + \sqrt{34} < 12; \quad \frac{1}{12} < \frac{1}{6 + \sqrt{34}} < \frac{1}{11};$$

$$\frac{1}{12} < \frac{6 - \sqrt{34}}{2} < \frac{1}{11}; \quad \frac{1}{9} < \frac{1}{6} < 6 - \sqrt{34} < \frac{2}{11} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Таким образом, } 11 < 6 + \sqrt{34} < 12 \text{ и } \frac{1}{9} < 6 - \sqrt{34} < \frac{1}{3}.$$

Значит для $x \in \mathbb{Z}$ $3^{-x} < 12$, т.е. $-x \leq 2$; $x \geq -2$.

Аналогично для $x \in \mathbb{Z}$ $3^{-x} > \frac{1}{9}$, т.е. $-x \geq -1$; $x \leq 1$.

Следовательно, возможные корни второго уравнения $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$. Проверим их:

а) Пусть $x = -2$.

Второе уравнение приобретает вид $y^3 + 2y - 6 = 0$.

Его целые корни могут быть только числами ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 .

Проверкой убеждаемся, что целых корней у уравнения нет.

б) Пусть $x = -1$. Получаем уравнение $y^3 + y - 6 = 0$.

Аналогично целых корней у него нет.

в) Пусть $x = 0$. Имеем уравнение $y^3 - 6 = 0$ — также целых корней нет.

г) Пусть $x = 1$. У уравнения $y^3 - y - 6 = 0$ есть единственный целый корень $y = 2$.

Итак, единственная пара решений системы — $(1; 2)$.

Ответ: $(1; 2)$.

$$8) \begin{cases} \sin^4 \pi x + \sqrt{1 + \cos \pi y} = 0 \\ (x^3 + y^2 + 2xy - 5)\sqrt{7 \cdot 2^{y+2} - 3 \cdot 4^y - 10} = 0 \end{cases}$$

Решение проведем аналогично.

Из первого уравнения

$$\begin{cases} \sin^4 \pi x = 0 \\ 1 + \cos \pi y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x = \pi k \\ \pi y = \pi + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = k \\ y = 1 + 2n \end{cases}$$

Значит, решениями системы могут быть только целые x и целые нечетные y .

Второе уравнение системы имеет решение, если

$$-(3 \cdot (2^y)^2 - 28 \cdot 2^y + 10) \geq 0;$$

$$(2^y)_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 30}}{3} = \frac{14 \pm \sqrt{166}}{3}.$$

$$\frac{14 - \sqrt{166}}{3} \leq 2^y \leq \frac{14 + \sqrt{166}}{3} \Rightarrow \frac{14 - \sqrt{166}}{3} \geq 2^y \geq \frac{14 - \sqrt{166}}{2}.$$

$$\text{Учтем, что } \frac{1}{3} < \frac{14 - \sqrt{166}}{3} < \frac{1}{2}; \quad 8 < \frac{14 + \sqrt{166}}{3} < 9.$$

Рассуждая аналогично предыдущей задаче, получим $y \in \{-1; 1; 3\}$.

Проверим, какие из этих чисел действительно являются корнями.

а) Пусть $y = -1$.

Из второго уравнения $x^3 + 1 - 2x - 5 = 0$; $x^3 - 2x - 4 = 0$;

$x = 2$ — корень. Разделив уголком, получим

$$\frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 2; \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0.$$

Множитель $x^2 + 2x + 2$ корней не имеет, значит $x = 2$ — единственный корень, и пара $(2; -1)$ — решение системы.

б) Пусть $y = 1$.

Второе уравнение принимает вид $x^3 + 2x - 4 = 0$.

Проверкой убеждаемся, что из возможных целых корней ± 1 , ± 2 , ± 4 ни один не является корнем.

в) Пусть $y = 3$.

Тогда имеем уравнение $x^3 + 6x + 4 = 0$. Аналогично убеждаемся, что целых корней нет.

Ответ: $(2; -1)$.

7

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Разложите на множители:

- 1) $\sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2}$;
- 2) $\cos 10\alpha \cdot \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cdot \cos 6\alpha$;
- 3) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

- 1) $\frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;
- 2) $\frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha$;

3. Вычислите:

- 1) $\sin^2 68^\circ - \sin^2 38^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3$;
- 2) $\frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ}$;
- 3) $(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ$;

$$4) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}};$$

$$5) \frac{5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{14} \right)}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}};$$

$$6) \frac{\sin^2 32^\circ + \sin 26^\circ}{5 \cos^2 32^\circ};$$

$$7) \frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ};$$

$$8) \frac{2 \cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ};$$

$$9) \frac{3 \cos 196^\circ + 12 \cos 164^\circ}{\cos 16^\circ};$$

$$10) \frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin 77^\circ};$$

$$11) \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 13^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ}.$$

Карточка 2

1. Разложите на множители:

1) $1 + \sin \frac{2\alpha}{3};$

2) $\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha;$

3) $1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$

2. Докажите тождества:

1) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$

2) $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

3. Вычислите:

1) $\sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2;$

2) $\frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) \cdot \cos 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ};$

3) $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ};$

4) $\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}};$

5) $\frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{10}\right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}};$

6) $\operatorname{tg} 7^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^\circ}\right);$

7) $\frac{\cos 48^\circ + \cos 42^\circ + \sqrt{2} \cos 3^\circ}{\sqrt{2} \sin 87^\circ};$

8) $\cos^2 23^\circ + \cos^2 83^\circ + \cos^2 37^\circ + 3;$

- 9) $\frac{3 \cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ};$
- 10) $\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ};$
- 11) $\frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin 27^\circ - 4 \sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ}.$

Карточка 3

1. Разложите на множители:

$$1) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4} \right);$$

$$2) \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 6\alpha;$$

$$3) \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{3\alpha}{2}} = 2 \cos \alpha;$$

$$2) \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

3. Вычислите:

$$1) \cos^2 36^\circ - \cos^2 120^\circ - 0,5 \sin 18^\circ - 0,5;$$

$$2) \frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \cos 65^\circ)}{\sin 20^\circ};$$

$$3) \frac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg} 52^\circ) \cdot \cos 26^\circ \cdot \sin 52^\circ}{\cos 78^\circ};$$

$$4) \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}};$$

$$5) \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{9}}{5 \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{9}\right)};$$

$$6) \frac{\cos^2 34^\circ - \sin 22^\circ}{4 \sin^2 34^\circ};$$

$$7) \frac{\cos 73^\circ + \cos 47^\circ + 2 \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ};$$

- 8) $\frac{2 \sin^2 85^\circ + 2 \sin^2 25^\circ - 3}{4 \cos^2 55^\circ};$
- 9) $\frac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{7 \cos 11^\circ - 3 \sin 79^\circ};$
- 10) $\frac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ};$
- 11) $\frac{3 \sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2 \cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cdot \cos 75^\circ}.$

Карточка 4

1. Разложите на множители:

- 1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha)$;
- 2) $\sin 10\alpha \cdot \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \cdot \sin 6\alpha$;
- 3) $\cos \alpha + 2 \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$.

2. Докажите тождества:

- 1) $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 2$;
- 2) $\frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2 \cos \alpha + 1} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

3. Вычислите:

- 1) $\sin 49^\circ \cdot \sin 11^\circ + \cos^2 71^\circ + 1$;
- 2) $\frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ}$;
- 3) $\sin 24^\circ \cdot (\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ)$;
- 4) $\frac{\left(\sin \frac{\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9}\right)^2 - 1}{\sin \frac{2\pi}{9}}$;
- 5) $\frac{\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{10}}$;
- 6) $\frac{\sin 10^\circ \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{\operatorname{tg} 5^\circ}$;
- 7) $\frac{\cos 85^\circ - \cos 35^\circ - \sqrt{3} \cos 65^\circ}{\sqrt{3} \sin 25^\circ}$;
- 8) $\cos^2 86^\circ + \cos^2 34^\circ - \cos^2 64^\circ + 3$;
- 9) $\frac{\cos 49^\circ + 2 \sin 41^\circ}{\sin 79^\circ - \sin 19^\circ}$;
- 10) $\frac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4 \cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 66^\circ}$;
- 11) $\frac{6 \sin 25^\circ - 3 \cos 65^\circ + 7 \sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cdot \cos 78^\circ}$.

Карточка 5

Вычислите:

1) $\frac{2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$;

2) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x$;

4) $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$;

5) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$;

6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

7) $2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$;

8) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,6$;

9) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$;

10) $\cos \alpha + \cos \beta$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = 4\pi$;

11) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$;

12) $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$, если $\sin x = 0,21$;

13) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Карточка 6

Вычислите:

- 1) $\frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$;
- 2) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$;
- 3) $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$;
- 4) $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,25$;
- 5) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -2$;
- 6) $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$, если $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$;
- 7) $2 \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,9$;
- 8) $\cos^2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,2$;
- 9) $\cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;
- 10) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 11) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 1,5\pi$;
- 12) $\operatorname{tg} x$, если $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,4}$;
- 13) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$.

Карточка 7

Вычислите:

- 1) $\frac{2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$;
- 2) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
- 3) $\sin x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$;
- 4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$;
- 6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right)$, если $\sin \alpha = -\sqrt{0,7}$;
- 7) $2 \sin 5\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{0,6}$;
- 8) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,8$;
- 9) $\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$;
- 10) $\sin \alpha + \sin \beta$, если $\alpha + \beta = 3\pi$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 11) $\sqrt{2} \cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$;
- 12) $\cos x$, если $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,5}$;
- 13) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,2$.

Карточка 8

Вычислите:

- 1) $\frac{2 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$;
- 2) $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{5}$;
- 3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3} \sin x$;
- 4) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$;
- 5) $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$;
- 6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right)$, если $\cos \alpha = -\sqrt{0,2}$;
- 7) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,6$;
- 8) $\sin \left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
- 9) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$;
- 10) $3 \cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{2}$;
- 11) $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, если $\sin x = -0,44$;
- 12) $2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$;
- 13) $\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Карточка 9

1. Вычислите:

1) $\sqrt{2} \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 73^\circ - \sqrt{3} \sin 780^\circ;$

2) $7 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$

3) $\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ;$

4) $(\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ) (\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ)^{-1} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ};$

5) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha},$ если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -0,5.$

2. Найдите минимальное значение функции (при $\operatorname{tg} \alpha > 0$)

$$f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

3. Решите уравнения:

1) $2 \cos^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0$ при $|x| \leq 1;$

2) $\operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\pi x) = \sqrt{3} - 1$ при $x \in [-2,5; -2].$

4. Вычислите:

1) $\frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} \right);$

2) $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right).$

Карточка 10**1. Вычислите:**

1) $(6 \operatorname{tg}^2 30^\circ + 2 \cos 180^\circ) \cdot \sin 93^\circ;$

2)
$$\frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 160^\circ \cdot \cos 100^\circ \cdot \sin 150^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cdot \cos 99^\circ};$$

3) $128 \cdot \sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \sin^2 80^\circ;$

4) $\frac{\sin^4 3 + \cos^4 3 - 1}{\cos^6 3 + \sin^6 3 - 1} : \frac{1}{3}.$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

3. Вычислите:

1) $\frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right);$

2) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right).$

4. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(3\pi x), \quad 2,4 < x < 3,2;$

2) $2 \cos^2(\pi x) = \sqrt{2} \sin(\pi x); \quad |x| \leq \frac{1}{2};$

3) $\sin^3 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) - \cos^3 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) = \frac{1}{4};$
 $1,5 < x < 3.$

Карточка 11

1. Вычислите:

1) $\frac{6 \sin 390^\circ \cdot \cos(-390^\circ)}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ};$

2) $\sin^6 15^\circ + 3 \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ + \cos^6 15^\circ;$

3) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ;$

4) $\sqrt{26} \cos \frac{\alpha}{2},$ если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

5) $\sqrt{3} \sin 2\alpha + \sin \frac{\alpha}{2},$ если $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

6) $\frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg}(-1) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right);$

7) $\sin \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right).$

2. Решите уравнения:

1) $2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2} \right) + \cos(2\pi x) = 3$ при $10 \leq x \leq 11;$

2) $5 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{3} \right) - \cos^{-2} \left(2\pi + \frac{\pi x}{3} \right) = 3$ при $1 \leq x \leq 4;$

3) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = x^2 - 3x - 4,5.$

*Карточка 12***1. Вычислите:**

1) $(2 \cos 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \operatorname{ctg} 960^\circ)^{-1}$;

2) $\sin 167^\circ \cdot \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \cdot \sin 197^\circ$;

3) $\cos 17^\circ \cdot \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ$;

4) $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$;

5) $\sin 18^\circ$;

6) $A(\alpha) = \frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$;

7) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\sin 4\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ при $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$;

8) $\operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} - \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}$.

2. Решите уравнения:

1) $\sin^3 \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \cos^3 \left(\frac{\pi x}{2} \right) = \frac{1}{4}$
при $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$;

2) $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = x^2 - 4x - 5$.

Карточка 13

1. Решите уравнения:

1) $\sqrt{3} + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$ при $8 < x < 20$;

2) $\sin(x - 30^\circ) \cdot \cos 2x = \sin(x - 30^\circ)$;

3) $\frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x$;

4) $\cos 3x = \sin 2x$;

5) $\frac{\sin 6x}{\sin 4x} = 1$ при $170^\circ < x < 200^\circ$;

6) $\cos(70^\circ + x) \cdot \cos(20^\circ - x) = \frac{1}{2}$;

7) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$;

8) $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2,5$;

9) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;

10) $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$;

11) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

2. Докажите тождество
$$\frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

3. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} + 1$.

4. Решите неравенство $\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 6 \sin x - 1$.

5. Постройте график

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

Карточка 14

1. Решите уравнения:

1) $1 + 2 \sin \frac{\pi x}{3} = 0$ при $2 < x < 4$;

2) $\cos 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x$;

3) $\sin 2x = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin x$;

4) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

5) $\cos 5x + \cos x = -2 \cos 3x$;

6) $2 \sin(40^\circ + x) \cdot \sin(50^\circ - x) = -1$;

7) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$;

8) $8 \cos^4 x = 11 \cos 2x - 1$;

9) $\cos \frac{4x}{3} + \sin^2 \frac{3x}{2} + 2 \sin^2 \frac{5x}{6} = \cos^2 \frac{3x}{2}$;

10) $\sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$;

11) $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$.

2. Докажите тождество
$$\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}.$$

3. Вычислите

$$\sin(\alpha - 2\beta), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2,4, \operatorname{tg} \beta = -0,75 \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

4. Решите неравенство $\sqrt{7 - 18 \operatorname{tg} x} \geq 6 \operatorname{tg} x + 11$.

5. Постройте график:

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)}.$$

Карточка 15

1. Решите уравнения:

1) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0;$

2) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0;$

3) $\sin 2x = \sin 3x;$

4) $\cos(2x - 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ)$ при $90^\circ < x < 180^\circ;$

5) $\sin x + \sin 5x = 2 \cos 2x;$

6) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x;$

7) $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}};$

8) $2 \sin x \cdot \sin 8x = \cos 7x;$

9) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x;$

10) $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x;$

11) $\sin^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x};$

12) $\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$

2. Докажите тождество

$$1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}.$$

3. Вычислите $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ.$ 4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x}.$

Карточка 16

1. Решите уравнения:

1) $2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0;$

2) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0;$

3) $\cos \frac{x}{3} = \cos 2x;$

4) $\sin(3x - 450^\circ) = \sin(6x - 540^\circ)$ при $0^\circ < x < 45^\circ;$

5) $\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1$ при $170^\circ < x < 280^\circ;$

6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$

7) $\sin 2x + \cos 2x = -1;$

8) $2\sin 2x \cdot \cos x = \sin 3x;$

9) $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}\sin x;$

10) $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x;$

11) $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0;$

12) $\cos 2x + \cos x = \sin 3x.$

2. Докажите тождество

$$1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

3. Вычислите $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ$.4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

Решение карточки 1

1. Разложите на множители:

$$1) \sin \frac{5\alpha}{3} + \sin \frac{3\alpha}{2} =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin \frac{19\alpha}{12} \cdot \cos \frac{\alpha}{12}.$$

$$2) \cos 10\alpha \cdot \cos 8\alpha + \cos 8\alpha \cdot \cos 6\alpha =$$

$$= \cos 8\alpha \cdot (\cos 10\alpha + \cos 6\alpha) =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1)$$

$$= 2 \cos 8\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 2\alpha = 2 \cos^2 8\alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

$$3) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \sin 2\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot (2 \cos \alpha + 1) =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot 2 \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1)$$

$$= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{3}}{2} \right) =$$

$$= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$L = \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$= \frac{2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\begin{array}{l} L = \operatorname{ctg} \alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg} \alpha \end{array} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \cos 2\alpha.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \quad (7.7)$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.7)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \cos 5\alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha)}{\cos^2 3\alpha - \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)} = \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos 6\alpha) - \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 6\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\alpha} = \\
 &= \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4\alpha)} = \frac{2 \sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = 2 \cos 2\alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \cos 2\alpha \\
 \Pi &= 2 \cos 2\alpha \quad \Big| \Rightarrow L = \Pi.
 \end{aligned}$$

3. Вычислите:

$$1) \sin^2 68^\circ - \sin^2 38^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 =$$

$$\begin{aligned}
 &2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2) \\
 &\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.2) \\
 &\sin(-\alpha) = -\sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 136^\circ) - \frac{1}{2}(1 - \cos 76^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 - 0,5 \cos 136^\circ - 0,5 + 0,5 \cos 76^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5(\cos 76^\circ - \cos 136^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 \cdot (-2) \sin 106^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \\
 &= 0,5 \sin 106^\circ - 0,5 \sin 106^\circ + 3 = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{3(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (3.5) \\
 &\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(\cos(90^\circ - 70^\circ) - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \\
 &= \frac{3(\sin 70^\circ - \sin 20^\circ)}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \\
 &= \frac{3 \cdot 2 \sin 25^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2} \sin 25^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$3) (\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad 5.1$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha} \quad 5.2$$

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sin 14^\circ}{\cos 14^\circ} + \frac{\cos 28^\circ}{2 \sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{2 \sin^2 14^\circ + \cos 28^\circ}{2 \sin 14^\circ \cos 14^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{2 \sin^2 14^\circ + 1 - 2 \sin^2 14^\circ}{2 \sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ =$$

$$= \left(\frac{1}{2 \sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ} \right) \cdot \cos 14^\circ \cdot \sin 14^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$4) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^4 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5}} = \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad 5.1$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cdot \left(\cos^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} \right)} =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}{1 - \cos^2 \frac{2\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{2\pi}{5}}{\sin^2 \frac{2\pi}{5}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$5) \frac{5 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{14} \right)}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} =$$

$$\boxed{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha} \quad 3.5$$

$$\boxed{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \quad 7.4$$

$$= \frac{5 \left(\sin \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} \right)}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} = \frac{5 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}} = \boxed{10}.$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{\sin^2 32^\circ + \sin 26^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} &= \begin{array}{|l} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2) \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (3.6) \\ 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2) \end{array} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 64^\circ) + \sin(90^\circ - 64^\circ)}{5 \cos^2 32^\circ} = \\
 &= \frac{0,5 - 0,5 \cos 64^\circ + \cos 64^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} = \\
 &= \frac{0,5 + 0,5 \cos 64^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} = \frac{\cos^2 32^\circ}{5 \cos^2 32^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{\cos 9^\circ + \cos 51^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} &= \\
 &= \begin{array}{|l} \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1) \end{array} \\
 &= \frac{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 21^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} = \\
 &= \frac{\sqrt{3} \cos 21^\circ + \sqrt{3} \cos 21^\circ}{2\sqrt{3} \cos 21^\circ} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{2 \cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 76^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} &= \\
 &= \begin{array}{|l} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2) \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1) \\ 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2) \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (3.6) \end{array} \\
 &= \frac{1 + \cos 32^\circ + 1 + \cos 152^\circ - 3}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-1 + 2 \cos 92^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \\
 &= \frac{-1 + \cos 92^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-(1 - \cos 92^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = \frac{-2 \sin^2 46^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \\
 &= -\frac{2 \sin^2(90^\circ - 46^\circ)}{\cos^2 44^\circ} = -\frac{2 \cos^2 44^\circ}{\cos^2 44^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \frac{3 \cos 196^\circ + 12 \cos 164^\circ}{\cos 16^\circ} = \frac{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha}{\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha} \begin{matrix} 3.17 \\ 3.13 \end{matrix} \\
 & = \frac{3 \cos(180^\circ + 16^\circ) + 12 \cos(180^\circ - 16^\circ)}{\cos 16^\circ} = \\
 & = \frac{-3 \cos 16^\circ - 12 \cos 16^\circ}{\cos 16^\circ} = \boxed{-15}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{\sin 43^\circ + \sin 17^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin 77^\circ} = \\
 & \frac{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \begin{matrix} 7.3 \\ 3.6 \end{matrix} \\
 & = \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \sin(90^\circ - 13^\circ)} = \frac{\cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ + 3 \cos 13^\circ} = \boxed{\frac{1}{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad & \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin 113^\circ + \cos 203^\circ}{\cos 13^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 77^\circ} = \\
 & \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))}{\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha} \begin{matrix} 7.7 \\ 3.13 \end{matrix} \\
 & \frac{\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha}{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha} \begin{matrix} 3.3 \\ 3.17 \end{matrix} \\
 & = \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \sin(90^\circ + 23^\circ) + \cos(180^\circ + 23^\circ)}{0,5(\cos 23^\circ + \cos 3^\circ) - 0,5(\cos 157^\circ + \cos 3^\circ)} = \\
 & = \frac{3 \cos 23^\circ - 3 \cos 23^\circ - \cos 23^\circ}{0,5 \cos 23^\circ + 0,5 \cos 3^\circ - 0,5 \cos(180^\circ - 23^\circ) - 0,5 \cos 3^\circ} = \\
 & = -\frac{\cos 23^\circ}{0,5 \cos 23^\circ + 0,5 \cos 23^\circ} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

Решение карточки 2

1. Разложите на множители:

$$1) \ 1 + \sin \frac{2\alpha}{3} =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{2\alpha}{3} = 2 \sin \left(\frac{3\pi + 4\alpha}{12} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi - 4\alpha}{12} \right).$$

$$2) \ \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.2)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 4\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot (\sin \alpha + \sin 2\alpha) =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 4 \sin 3\alpha \cdot \sin 1,5\alpha \cdot \cos 0,5\alpha.$$

$$3) \ 1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \quad (7.10)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cos \alpha \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2\sqrt{2} \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \ \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$L = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \Pi = \operatorname{tg}^2 \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad 5.2$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{\cos^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите:

$$1) \sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ + \sin^2 13^\circ - 2 =$$

$$\boxed{\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]} \quad 7.8$$

$$\boxed{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha} \quad 5.2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\cos 26^\circ - \cos 60^\circ) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 26^\circ - 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cos 26^\circ - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 26^\circ - 2 = \boxed{-1,75}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ) \cdot \cos 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} =$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad 3.6$$

$$\boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad 7.1$$

$$\boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha} \quad 3.5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin(90^\circ - 80^\circ)}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \\ &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 80^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sqrt{2} \sin 55^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ} &= \frac{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad \begin{matrix} 9.2 \\ 9.1 \end{matrix} \\
 &= \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}}{\operatorname{ctg} 30^\circ} = \frac{\frac{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}}{\operatorname{ctg} 30^\circ} = \\
 &= \frac{-\frac{\cos 30^\circ}{0,5 \sin 30^\circ}}{\operatorname{ctg} 30^\circ} = -2 \frac{\operatorname{ctg} 30^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} &= \frac{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha} \quad \begin{matrix} 9.1 \\ 9.2 \end{matrix} \\
 &= \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7}} + \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\
 &= \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{\left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}} \right) \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{1 + \cos \frac{\pi}{7}} = \\
 &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{1}{0,5 \sin \frac{2\pi}{7}} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{10} \right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} &= \\
 &= \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) \right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} \quad \begin{matrix} 3.6 \\ 7.1 \end{matrix} \\
 &= \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right)}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \\
 &= \frac{3 \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}}{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10}} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$6) \operatorname{tg} 7^{\circ} \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^{\circ}} + \frac{1}{\operatorname{tg} 14^{\circ}} \right) = \begin{array}{|l} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{array} \begin{array}{|l} 5.2 \\ 5.1 \end{array}$$

$$= \operatorname{tg} 7^{\circ} \cdot \left(\frac{1}{\sin 14^{\circ}} + \frac{\cos 14^{\circ}}{\sin 14^{\circ}} \right) = \operatorname{tg} 7^{\circ} \cdot \left(\frac{1 + \cos 14^{\circ}}{\sin 14^{\circ}} \right) =$$

$$= \operatorname{tg} 7^{\circ} \cdot \frac{2 \cos^2 7^{\circ}}{\sin 14^{\circ}} = \frac{\sin 7^{\circ}}{\cos 7^{\circ}} \cdot \frac{2 \cos^2 7^{\circ}}{\sin 14^{\circ}} = \boxed{1}.$$

$$7) \frac{\cos 48^{\circ} + \cos 42^{\circ} + \sqrt{2} \cos 3^{\circ}}{\sqrt{2} \sin 87^{\circ}} =$$

$$\begin{array}{|l} \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{array} \quad 7.1$$

$$= \frac{2 \cos 45^{\circ} \cdot \cos 3^{\circ} + \sqrt{2} \cos 3^{\circ}}{\sqrt{2} \sin(90^{\circ} - 3^{\circ})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos 3^{\circ} + \sqrt{2} \cos 3^{\circ}}{\sqrt{2} \cos 3^{\circ}} = \boxed{2}.$$

$$8) \cos^2 23^{\circ} + \cos^2 83^{\circ} + \cos^2 37^{\circ} + 3 =$$

$$\begin{array}{|l} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \end{array} \quad 5.2$$

$$\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha \quad 3.17$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.2$$

$$\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha \quad 3.5$$

$$= 0,5(1 + \cos 46^{\circ}) + 0,5(1 + \cos 166^{\circ}) +$$

$$+ 0,5(1 + \cos 74^{\circ}) + 3 =$$

$$= 0,5 + 0,5 \cos 46^{\circ} + 0,5 + 0,5 \cos(180^{\circ} - 14^{\circ}) +$$

$$+ 0,5 + 0,5 \cos 74^{\circ} + 3 =$$

$$= 4,5 + 0,5 \cos 46^{\circ} - 0,5 \cos 14^{\circ} + 0,5 \cos 74^{\circ} =$$

$$= 4,5 - \sin 30^{\circ} \cdot \sin 16^{\circ} + 0,5 \cos(90^{\circ} - 16^{\circ}) =$$

$$= 4,5 - 0,5 \sin 16^{\circ} + 0,5 \sin 16^{\circ} = \boxed{4,5}.$$

$$9) \frac{3 \cos 9^\circ + \sin 81^\circ}{\sin 21^\circ + \sin 39^\circ} =$$

$$\boxed{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (7.3)$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad (3.6)$$

$$= \frac{3 \cos 9^\circ + \sin(90^\circ - 9^\circ)}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{3 \cos 9^\circ + \cos 9^\circ}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \boxed{4}.$$

$$10) \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 48^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} =$$

$$\boxed{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad (7.3)$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin 44^\circ \cdot \cos 4^\circ + 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 4^\circ \cdot (\sin 44^\circ + \sin 40^\circ)}{2 \sin 88^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 42^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 42^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\sin(90^\circ - 2^\circ) \cdot \sin 42^\circ} = \frac{2 \cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$$11) \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin 27^\circ - 4 \sin 207^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \sin 78^\circ + \sin 75^\circ \cdot \sin 12^\circ} =$$

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad (3.6)$$

$$\boxed{\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha} \quad (3.30)$$

$$\boxed{\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha} \quad (3.1)$$

$$\boxed{\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \sin(90^\circ - 63^\circ) - 4 \sin(270^\circ - 63^\circ)}{0,5(\cos 63^\circ - \cos 93^\circ) + 0,5(\cos 63^\circ - \cos 87^\circ)} = \\ &= \frac{5 \cos 63^\circ + 2 \cos 63^\circ + 4 \cos 63^\circ}{0,5 \cos 63^\circ - 0,5 \cos(90^\circ + 3^\circ) + 0,5 \cos 63^\circ - 0,5 \cos(90^\circ - 3^\circ)} = \\ &= \frac{11 \cos 63^\circ}{\cos 63^\circ + 0,5 \sin 3^\circ - 0,5 \sin 3^\circ} = \frac{11 \cos 63^\circ}{\cos 63^\circ} = \boxed{11}. \end{aligned}$$

Решение карточки 3

1. Разложите на множители:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) &= \boxed{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} \quad (7.5) \\
 &= \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)}.
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 6\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]} \quad (7.8) \\
 \boxed{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos 5\alpha) - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 6\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos 6\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 6\alpha - \cos 5\alpha) = -\sin \frac{11\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

$$3) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) =$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \quad (7.3) \\
 \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (5.1) \\
 \boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \\
 &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] = \\
 &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \\
 &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).
 \end{aligned}$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{3\alpha}{2}} = 2 \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (5.2)$$

$$L = \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 \frac{3\alpha}{2}} = \frac{2 \cos 3\alpha \cdot \cos \alpha}{\cos 3\alpha} = 2 \cos \alpha;$$

$$\begin{array}{l} L = 2 \cos \alpha \\ \Pi = 2 \cos \alpha \end{array} \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\cos^2 2\alpha - 2 - 2 \cos 2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 2 + 2 \cos 2\alpha - 1} = \\ &= \frac{\cos^2 2\alpha - 2 \cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1} = \frac{(\cos 2\alpha - 1)^2}{(\cos 2\alpha + 1)^2} = \\ &= \frac{4 \sin^4 \alpha}{4 \cos^4 \alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} L = \operatorname{tg}^4 \alpha \\ \Pi = \operatorname{tg}^4 \alpha \end{array} \Bigg| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите:

$$1) \cos^2 36^\circ - \cos^2 120^\circ - 0,5 \sin 18^\circ - 0,5 =$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(1 + \cos 72^\circ) - 0,25 - 0,5 \sin(90^\circ - 72^\circ) - 0,5 = \\ &= 0,5 + 0,5 \cos 72^\circ - 0,75 - 0,5 \cos 72^\circ = \boxed{-0,25}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \cos 65^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (7.2)$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \sin 20^\circ \cdot \sin 45^\circ}{\sin 20^\circ} = [2].$$

$$3) \frac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg} 52^\circ) \cdot \cos 26^\circ \cdot \sin 52^\circ}{\cos 78^\circ} =$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (7.6)$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (3.6)$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg}(90^\circ - 38^\circ)) \cdot \cos 26^\circ \cdot \sin 52^\circ}{\cos 78^\circ} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{tg} 38^\circ) \cdot \cos 26^\circ \cdot \sin(90^\circ - 38^\circ)}{\cos 78^\circ} =$$

$$= \frac{-\frac{\sin 12^\circ}{\cos 26^\circ \cdot \cos 38^\circ} \cdot \cos 26^\circ \cdot \cos 38^\circ}{\cos 78^\circ} =$$

$$= -\frac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} = -\frac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} = [-1].$$

$$4) \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{8}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} =$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (5.10)$$

$$= \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - 1\right)^2 = \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} - 1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1\right)^2 = [2].$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{9}}{5 \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{9} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{9} \right)} = \\
 & = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{9} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{9} \right)}{5 \sin \left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{9} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{9} \right)} = \boxed{\frac{2}{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{\cos^2 34^\circ - \sin^2 22^\circ}{4 \sin^2 34^\circ} = \begin{array}{l} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2) \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (3.6) \\ 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2) \end{array} \\
 & = \frac{0,5(1 + \cos 68^\circ) - \sin(90^\circ - 68^\circ)}{4 \sin^2 34^\circ} = \\
 & = \frac{0,5 + 0,5 \cos 68^\circ - \cos 68^\circ}{4 \sin^2 34^\circ} = \\
 & = \frac{0,5 - 0,5 \cos 68^\circ}{4 \sin^2 34^\circ} = \frac{\sin^2 34^\circ}{4 \sin^2 34^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{\cos 73^\circ + \cos 47^\circ + 2 \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ} = \\
 & = \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 13^\circ + 2 \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ} = \frac{3 \cos 13^\circ}{2 \cos 13^\circ} = \boxed{1,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{2 \sin^2 85^\circ + 2 \sin^2 25^\circ - 3}{4 \cos^2 55^\circ} = \\
 & = \frac{1 - \cos 170^\circ + 1 - \cos 50^\circ - 3}{4 \cos^2 55^\circ} = -\frac{1 + \cos 170^\circ + \cos 50^\circ}{4 \cos^2 55^\circ} = \\
 & = -\frac{1 + 2 \cos 110^\circ \cdot \cos 60^\circ}{4 \cos^2 55^\circ} = -\frac{2 \cos^2 55^\circ}{4 \cos^2 55^\circ} = \boxed{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$9) \frac{\cos 71^\circ + \cos 49^\circ}{7 \cos 11^\circ - 3 \sin 79^\circ} =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad 3.6$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 11^\circ}{7 \cos 11^\circ - 3 \sin(90^\circ - 11^\circ)} = \\ &= \frac{\cos 11^\circ}{7 \cos 11^\circ - 3 \cos 11^\circ} = \frac{\cos 11^\circ}{4 \cos 11^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

$$10) \frac{\cos 16^\circ - \cos 24^\circ - \cos 32^\circ + \cos 40^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} =$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.1$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.2$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad 3.5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos 28^\circ \cdot \cos 12^\circ - 2 \cos 28^\circ \cdot \cos 4^\circ}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 28^\circ \cdot (\cos 12^\circ - \cos 4^\circ)}{\cos 86^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \cos 28^\circ} = \\ &= \frac{-2 \cdot 2 \sin 4^\circ \cdot \sin 8^\circ}{\cos(90^\circ - 4^\circ) \cdot \sin 8^\circ} = -\frac{4 \sin 4^\circ}{\sin 4^\circ} = \boxed{-4}. \end{aligned}$$

$$11) \frac{3 \sin 124^\circ - \cos 146^\circ - 2 \cos 34^\circ}{\cos 49^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 41^\circ \cdot \cos 75^\circ} =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad 7.7$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \sin(90^\circ + 34^\circ) - \cos(180^\circ - 34^\circ) - 2 \cos 34^\circ}{0,5(\cos 64^\circ + \cos 34^\circ) + 0,5(\cos 116^\circ + \cos 34^\circ)} = \\ &= \frac{3 \cos 34^\circ + \cos 34^\circ - 2 \cos 34^\circ}{0,5 \cos 64^\circ + 0,5 \cos 34^\circ + 0,5 \cos 116^\circ + 0,5 \cos 34^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ + \cos 90^\circ \cdot \cos 26^\circ} = \frac{2 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

Решение карточки 4

1. Разложите на множители:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad (3.1)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad (3.18)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (7.4)$$

$$= -\sin 4\alpha + \sin 8\alpha = 2 \cos 6\alpha \cdot \sin 2\alpha.$$

$$2) \sin 10\alpha \cdot \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \cdot \sin 6\alpha =$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (7.8)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.1)$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$= 0,5(\cos 2\alpha - \cos 18\alpha) + 0,5(\cos 2\alpha - \cos 14\alpha) =$$

$$= 0,5 \cos 2\alpha - 0,5 \cos 18\alpha + 0,5 \cos 2\alpha - 0,5 \cos 14\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha - 0,5(\cos 18\alpha + \cos 14\alpha) = \cos 2\alpha - \cos 16\alpha \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha(1 - \cos 16\alpha) = 2 \cos 2\alpha \cdot \sin^2 8\alpha.$$

$$3) \cos \alpha + 2 \sin 2\alpha - \cos 3\alpha =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.2)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.3)$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot (1 + \sin \alpha) =$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha\right) =$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right) =$$

$$= 4 \sin 2\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = 2.$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{0,5 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \right)} = \\ &= \frac{1 - \sin 2\alpha}{0,5(1 - \sin 2\alpha)} = 2. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 2 \\ \Pi = 2 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2 \cos \alpha + 1} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (5.2)$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2 \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{1 + 2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \cos^2 \alpha - 1 - 2 \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha \cdot (1 + \cos \alpha)}{-2 \cos \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} = -\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \\ \Pi = -\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите:

$$1) \sin 49^\circ \cdot \sin 11^\circ + \cos^2 71^\circ + 1 =$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (7.9)$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad (5.2)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= 0,5(\cos 38^\circ - \cos 60^\circ) + 0,5(1 + \cos 142^\circ) + 1 = \\ &= 0,5 \cos 38^\circ - 0,5 \cos 60^\circ + 0,5 + 0,5 \cos(180^\circ - 38^\circ) + 1 = \\ &= 0,5 \cos 38^\circ - 0,25 + 1,5 - 0,5 \cos 38^\circ = \boxed{1,25}. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} =$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (3.5)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 40^\circ - \cos(90^\circ - 50^\circ)}{\sqrt{2} \cos 85^\circ} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 50^\circ}{\sqrt{2} \cos(90^\circ - 5^\circ)} = \\ &= -\frac{2 \sin 5^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2} \sin 5^\circ} = -\frac{\sqrt{2} \sin 5^\circ}{\sqrt{2} \sin 5^\circ} = \boxed{-1}. \end{aligned}$$

$$3) \sin 24^\circ \cdot (\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ) =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (5.3)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \sin 24^\circ \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}^2 12^\circ + 1}{\operatorname{tg} 12^\circ} \right) = \\ &= 2 \sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \left(\frac{1}{\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ} \right) = \boxed{2}. \end{aligned}$$

$$4) \frac{\left(\sin \frac{\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9} \right)^2 - 1}{\sin \frac{2\pi}{9}} = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9} - 2 \sin \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} - 1}{\sin \frac{2\pi}{9}} = \\ &= -\frac{2 \sin \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{2\pi}{9}} = -\frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{\sin \frac{2\pi}{9}} = \boxed{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{10}} &= \boxed{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \quad 7.2 \\
 &= \frac{-2 \sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10}}{2 \sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10}} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{\sin 10^\circ \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{\operatorname{tg} 5^\circ} &= \boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \quad 1.3 \\
 &\quad \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad 5.1 \\
 &= \frac{2 \sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}{0,5 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ} = \frac{2 \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{\cos 85^\circ - \cos 35^\circ - \sqrt{3} \cos 65^\circ}{\sqrt{3} \sin 25^\circ} &= \\
 &\quad \boxed{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \quad 7.1 \\
 &\quad \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha} \quad 3.5 \\
 &= \frac{-2 \sin 60^\circ \cdot \sin 25^\circ - \sqrt{3} \cos 65^\circ}{\sqrt{3} \sin 25^\circ} = \\
 &= \frac{-\sqrt{3} \sin 25^\circ - \sqrt{3} \cos(90^\circ - 25^\circ)}{\sqrt{3} \sin 25^\circ} = \\
 &= \frac{-\sqrt{3} \sin 25^\circ - \sqrt{3} \sin 25^\circ}{\sqrt{3} \sin 25^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \cos^2 86^\circ + \cos^2 34^\circ - \cos^2 64^\circ + 3 &= \\
 &\quad \boxed{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha} \quad 5.2 \\
 &\quad \boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \quad 7.1 \\
 &\quad \boxed{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha} \quad 3.17 \\
 &\quad \boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad 3.6 \\
 &\quad \boxed{\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha} \quad 3.3 \\
 &= 0,5(1 + \cos 172^\circ) + 0,5(1 + \cos 68^\circ) - 0,5(1 + \cos 128^\circ) + 3 = \\
 &= 0,5 + 0,5 \cos 172^\circ + 0,5 + 0,5 \cos 68^\circ - 0,5 - 0,5 \cos 128^\circ + 3 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3,5 + 0,5 \cdot 2 \cos 120^\circ \cdot \cos 52^\circ - 0,5 \cos 128^\circ = \\
 &= 3,5 - 0,5 \cos 52^\circ - 0,5 \cos(180^\circ - 52^\circ) = \\
 &= 3,5 - 0,5 \cos 52^\circ + 0,5 \cos 52^\circ = \boxed{3,5}.
 \end{aligned}$$

$$9) \frac{\cos 49^\circ + 2 \sin 41^\circ}{\sin 79^\circ - \sin 19^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{3.5} \\
 &\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \quad \text{7.4} \\
 &= \frac{\cos 49^\circ + 2 \sin(90^\circ - 49^\circ)}{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 49^\circ} = \frac{\cos 49^\circ + 2 \cos 49^\circ}{\cos 49^\circ} = \boxed{3}.
 \end{aligned}$$

$$10) \frac{\sin 48^\circ - \sin 60^\circ - \sin 72^\circ + \sin 84^\circ}{4 \cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 66^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \text{7.3} \\
 &\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad \text{7.2} \\
 &= \frac{2 \sin 66^\circ \cdot \cos 18^\circ - 2 \sin 66^\circ \cdot \cos 6^\circ}{4 \cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 66^\circ} = \frac{\cos 18^\circ - \cos 6^\circ}{2 \cos 84^\circ \cdot \sin 12^\circ} = \\
 &= \frac{-2 \sin 12^\circ \cdot \sin 6^\circ}{2 \cos(90^\circ - 6^\circ) \cdot \sin 12^\circ} = -\frac{\sin 6^\circ}{\sin 6^\circ} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$11) \frac{6 \sin 25^\circ - 3 \cos 65^\circ + 7 \sin 155^\circ}{\cos 53^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \cdot \cos 78^\circ} =$$

$$\begin{aligned}
 &\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \text{7.7} \\
 &\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{3.5} \\
 &\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \text{3.3} \\
 &\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{3.17} \\
 &= \frac{6 \sin(90^\circ - 65^\circ) - 3 \cos 65^\circ + 7 \sin(90^\circ + 65^\circ)}{0,5(\cos 65^\circ + \cos 41^\circ) - 0,5(\cos 115^\circ + \cos 41^\circ)} = \\
 &= \frac{6 \cos 65^\circ - 3 \cos 65^\circ + 7 \cos 65^\circ}{0,5 \cos 65^\circ + 0,5 \cos 41^\circ - 0,5 \cos(180^\circ - 65^\circ) - 0,5 \cos 41^\circ} = \\
 &= \frac{10 \cos 65^\circ}{0,5 \cos 65^\circ + 0,5 \cos 65^\circ} = \boxed{10}.
 \end{aligned}$$

Решение карточки 5

Вычислите:

$$1) \frac{2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha} = \quad \text{при } \operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{(1 + 5 \cos^2 \alpha) : \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 5} = \\ &= \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 5} = \frac{2(1 + 4) + 2}{1 + 4 + 5} = \boxed{1,2}. \end{aligned}$$

$$2) \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \quad \text{при } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.4)$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

$$3) \sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = ?$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.3)$$

$$2 \sin x \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \cos x; \quad \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos x;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \boxed{2}.$$

$$4) \cos 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = -\frac{1}{4}.$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{4}; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

$$6) \sin(\pi + 2\alpha), \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$7) 2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha, \text{ если } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}.$$

$$\begin{aligned} 2 \sin 3\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 5\alpha &= \cos \alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha = \\ &= \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot 0,6 - 1 = \boxed{0,2}. \end{aligned}$$

$$8) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right), \text{ если } \sin \alpha = 0,6.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) &= \boxed{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha} \quad 5.2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha) = \\ &= \frac{1 + 0,6}{2} = \boxed{0,8}. \end{aligned}$$

$$9) \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha \right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha \right) &= \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha) = \boxed{\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad 5.4 \\ &\quad \boxed{\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad 5.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (2\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{1 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + 12} = \boxed{\frac{1}{26}}.
 \end{aligned}$$

10) $\cos \alpha + \cos \beta$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = 4\pi$.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (7.1)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos 2\pi \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

11) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \frac{1}{2} =$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \frac{1}{2} + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= \cos(\alpha - \beta) - 1 = \cos \frac{\pi}{2} - 1 = \boxed{-1}.$$

12) $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$, если $\sin x = 0,21$.

$$\sin x = 0,21; \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,21;$$

$$1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,21 + 1;$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 1,21;$$

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1,21; \quad \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{1,21} = \boxed{\pm 1,1}.$$

$$13) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Так как } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{то } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{16}, \text{ тогда}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha =$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}.$$

Решение карточки 6

Вычислите:

$$1) \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3} &= \left(\frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3} \right) \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{5 \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{5 \operatorname{tg} \alpha + 3 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{4 - 2}{-5 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 4} = \boxed{0,4}. \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ если } \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} & 7.6 \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] & 7.7 \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} & 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{1}{0,5 \left(\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{0,5 \cos 2x} = \frac{2}{2 \cos^2 x - 1} = \\ &= \frac{2}{\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{\frac{1}{4} + 1} - 1} = \frac{10}{3} = \boxed{3\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

$$3) \operatorname{tg} x, \text{ если } \sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.3$$

$$\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x;$$

$$2 \sin x \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x; \quad \sqrt{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x;$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \cos x; \quad \operatorname{tg} x = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,25$.

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot 0,0625 - 1 = \boxed{-0,875}.$$

5) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -2$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 - 1}{-4} = \boxed{-0,75}.$$

6) $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$, если $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$.

$$\{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha\}$$

$$\begin{aligned} \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) &= -\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = -\cos 2\alpha = \\ &= -(2 \cos^2 \alpha - 1) = 1 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot 0,1 = \boxed{0,8}. \end{aligned}$$

7) $2 \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,9$.

$$\{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta\} \quad \text{4.1}$$

$$\{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta\} \quad \text{4.2}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = 0,9;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,81;$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,81; \quad -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,19.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin 8\alpha &= 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin(5\alpha + 3\alpha) = \\ &= 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 3\alpha \cdot \sin 5\alpha = \\ &= \sin 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 3\alpha \cdot \sin 5\alpha = -\sin 2\alpha = \\ &= -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \boxed{-0,19}. \end{aligned}$$

8) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin \alpha = -0,2$.

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad 5.2$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha \quad 3.25$$

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha = 0,5 - 0,1 = \boxed{0,4}. \end{aligned}$$

9) $\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad 4.4$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 5.4$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 5.3$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha\right) &= \cos \frac{4\pi}{3} \cdot \cos 2\alpha + \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \sin 2\alpha = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{16}}{1 + \frac{3}{16}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{3}{16}}\right) = \boxed{-\frac{37}{38}}. \end{aligned}$$

10) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} &= \frac{2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

11) $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 1,5\pi$.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta + 0,5 - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \\ = \cos(\alpha + \beta) + 0,5 + 0,5 &= \cos \frac{3\pi}{2} + 1 = \boxed{1}.\end{aligned}$$

12) $\operatorname{tg} x$, если $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,4}$.

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,4};$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,4;$$

$$1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,4; \quad \sin x = -0,6;$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - 0,6^2} = \pm 0,8;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{-0,6}{\pm 0,8} = \boxed{\pm 0,75}.$$

13) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0,8;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,64;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,64; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,36;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,18;$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) =$$

$$= 0,8 \cdot (1 + 0,18) = \boxed{0,944}.$$

Решение карточки 7

Вычислите:

1) $\frac{2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha} &= \frac{(2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\frac{2}{\cos^2 \alpha} + 3 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 3 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot 17 + 12}{16 + 4} = \boxed{2,3}, \text{ так как } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

2) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.3$$

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= 2 \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin x = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3) $\sin x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = \sqrt{3}$.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 7.3$$

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cdot \cos 30^\circ &= \sqrt{3}; \\ \sqrt{3} \sin x &= \sqrt{3}; \quad \sin x = \boxed{1}. \end{aligned}$$

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 5.3$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 0,5}{1 + 0,25} = \frac{1}{1,25} = \boxed{0,8}.$$

5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{6}{1 - 9} + \frac{1 - 9}{6} = \boxed{-2\frac{1}{12}}. \end{aligned}$$

6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right)$, если $\sin \alpha = -\sqrt{0,7}$.

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2 \alpha) = -1 + 2 \cdot 0,7 = \boxed{0,4}.$$

7) $2 \sin 5\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{0,6}$.

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (7.9)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{0,6};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,6;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,6;$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,4; \quad \sin 2\alpha = -0,4;$$

$$2 \sin 5\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 8\alpha =$$

$$= \sin 8\alpha + \sin 2\alpha - \sin 8\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha = \boxed{-0,4}.$$

8) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,8$.

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \begin{cases} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha & (5.2) \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha & (3.5) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} (1 - \sin \alpha) = \frac{1}{2} (1 - 0,8) = \boxed{0,1}.$$

9) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (4.1)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad (3.1)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (5.4)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2\alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2\alpha \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - 9}{1 + 9} - \frac{6}{1 + 9} = \boxed{-1,4}. \end{aligned}$$

10) $\sin \alpha + \sin \beta$, если $\alpha + \beta = 3\pi$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \\ &= 2 \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

11) $\sqrt{2} \cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5\pi}{4} + \cos(\alpha - \beta) \right];$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ значит } \sqrt{2} \cos(\alpha - \beta) = \boxed{1}.$$

$$12) \cos x, \text{ если } \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,5}.$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,5};$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = (\sqrt{0,5})^2;$$

$$1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,5; \quad -2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = -0,5; \quad \sin x = 0,5;$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}; \quad \cos x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \boxed{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$13) \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha, \text{ если } \sin \alpha - \cos \alpha = 1,2.$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = 1,2;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1,44;$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1,44; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,44;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,22;$$

$$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha =$$

$$= (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) =$$

$$= (\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) =$$

$$= 1,2(1 - 0,22) = \boxed{0,936}.$$

Решение карточки 8

Вычислите:

1) $\frac{2 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ & = \frac{(2 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha} = \\ & = \frac{\frac{2}{\cos^2 \alpha} + 5 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 5 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \\ & = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \boxed{-20}. \end{aligned}$$

2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \\ & = \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \boxed{0,4}. \end{aligned}$$

3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3} \sin x$.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} & \cos(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3} \sin x; \\ & 2 \cos 30^\circ \cdot \cos x = \sqrt{3} \sin x; \\ & \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3} \sin x; \quad \operatorname{ctg} x = \boxed{1}. \end{aligned}$$

4) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ 1.5

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \left[\frac{15}{17} \right].$$

5) $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$.

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \sin \alpha = \frac{2 \cdot 3}{1 + 9} = [0,6].$$

6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right)$, если $\cos \alpha = -\sqrt{0,2}$.

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha = 1 - 0,4 = [0,6].$$

7) $\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,6$.

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha \quad 5.2$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha \quad 3.5$$

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin \alpha + 1) = \frac{1}{2}(1 - 0,6) = [0,2].$$

8) $\sin \left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 5.1$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad 5.3$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad 4.2$$

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha\right) &= \sin\frac{7\pi}{6} \cdot \cos 2\alpha - \cos\frac{7\pi}{6} \cdot \sin 2\alpha = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{27}{4}}{1 + \frac{27}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{27}{4}} = \boxed{\frac{59}{62}}.
 \end{aligned}$$

9) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} &= \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \\
 &= \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4}} = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

10) $3 \cos(\alpha + \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Так как } \cos(\alpha + \beta) &= 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos(\alpha - \beta), \text{ то} \\
 3 \cos(\alpha + \beta) &= 3 \cdot (2 \cos \alpha \cdot \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)) = \\
 &= 3 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos \frac{7\pi}{2}\right) = 3 \cdot (-1 - 0) = \boxed{-3}.
 \end{aligned}$$

11) $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, если $\sin x = -0,44$.

$$\begin{aligned}
 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 &= \\
 &= \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \\
 &= 1 - \sin x = 1 + 0,44 = 1,44; \\
 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{1,44}, \\
 \text{значит, } \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} &= \boxed{\pm 1,2}.
 \end{aligned}$$

12) $2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} 2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos 5\alpha &= \cos 5\alpha + \cos \alpha - \cos 5\alpha = \\ &= \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1,2 - 1 = \boxed{0,2}. \end{aligned}$$

13) $\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^4 \alpha \cdot \cos^4 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^4} =$$

$$= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^4} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{64}} = \boxed{224}.$$

Решение карточки 9

1. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt{2} \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 73^\circ - \sqrt{3} \sin 780^\circ = \\
 & = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 - \sqrt{3} \sin 60^\circ = \frac{2}{2} \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 7 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \\
 & = \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \frac{7}{2} \cdot \sin 150^\circ = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ. \\
 & \operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 44^\circ) = \operatorname{ctg} 44^\circ; \\
 & \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 42^\circ) = \operatorname{ctg} 42^\circ; \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg} 2^\circ; \\
 & \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ = \\
 & = \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 42^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & (\operatorname{tg} 40^\circ - \cos^{-1} 40^\circ) (\cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 40^\circ)^{-1} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 & = \left(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - \frac{1}{\cos 40^\circ} \right) \cdot \frac{1}{\left(\cos 40^\circ - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \right)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ} \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ \left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ} \right)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sin 40^\circ - 1}{\cos^2 40^\circ} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 40^\circ - 1}{\sin 40^\circ}} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 & = \frac{(\sin 40^\circ - 1) \cdot \sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ \cdot (\sin 40^\circ - 1)} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos^2 40^\circ} = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

$$5) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -0,5.$$

Найдем $\operatorname{tg} \alpha$ по формуле тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot (-0,5)}{1 - (-0,5)^2} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos \alpha$, получим:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{1}{\frac{3-4}{3}} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}.$$

2. Найдите минимальное значение функции (при $\operatorname{tg} \alpha > 0$)

$$f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \alpha + \cos \alpha &= \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Минимальное значение выражение принимает, когда

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -1, \text{ т. е.}$$

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \geq 2 \text{ (так как } \operatorname{tg} \alpha > 0 \text{)}.$$

Найдем α , при которых достигается равенство

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2; \quad \text{ домножим на } \operatorname{tg} \alpha:$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0;$$

$$(\operatorname{tg} \alpha - 1)^2 = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = 1; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{4}{\sin^2 2\alpha}. \end{aligned}$$

Минимальное значение принимается, когда $\sin^2 2\alpha = 1$;

$$\sin^2 2\alpha = 1; \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k.$$

Теперь убедимся, что существует такое α , при котором достигаются все три минимума одновременно.

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad |k \in \mathbb{Z}.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k;$$

Очевидно, что $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ удовлетворяет всем трем условиям; кроме того, $\operatorname{tg} \alpha > 0$, следовательно

$$f_{\min} = f(\alpha) = -\sqrt{2} + 4 + 2 = \boxed{6 - \sqrt{2}}.$$

3. Решите уравнения:

$$1) \quad 2 \cos^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0 \quad \text{при } |x| \leq 1.$$

$$2 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi x}{6} \right) + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0; \quad 2 - 2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} + 3 \sin \frac{\pi x}{6} = 0;$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi x}{6} - 3 \sin \frac{\pi x}{6} - 2 = 0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно $\sin \frac{\pi x}{6}$:

$$\sin \frac{\pi x}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{6} = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{\pi x}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{\pi x}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = -\frac{1}{6} + 2k \\ \frac{x}{6} = -\frac{5}{6} + 2k \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 + 12k & x = -1 \\ x = -5 + 12k & \emptyset \text{ (так как } |x| \leq 1) \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$.

2) $\operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3} \operatorname{ctg}(\pi x) = \sqrt{3} - 1$ при $x \in [-2, 5; -2]$.

Домножим на $\operatorname{tg}(\pi x)$:

$$\operatorname{tg}^2(\pi x) - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(\pi x);$$

$$\operatorname{tg}^2(\pi x) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(\pi x) - \sqrt{3} = 0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}(\pi x)$. Решим его.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi x) &= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1) \pm (\sqrt{3} + 1)}{2}. \end{aligned}$$

а) $\operatorname{tg}(\pi x) = \sqrt{3}$; $\pi x = \frac{\pi}{3} + \pi k$; $x = \frac{1}{3} + k$; $x \notin [-2, 5; -2]$,
так как $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{tg}(\pi x) = -1$; $\pi x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = -\frac{1}{4} + k$; $x = -2\frac{1}{4}$
при $k = -2$.

Ответ: $x = -2\frac{1}{4}$.

4. Вычислите:

$$1). \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} \right).$$

Возьмем косинус от выражения в скобках, учтя, что $\arcsin \frac{3}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\arccos \frac{3}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \cos \left(\arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} \right) &= \\ &= \cos \left(\arccos \frac{3}{4} \right) \cdot \cos \left(\arcsin \frac{3}{4} \right) - \\ &\quad - \sin \left(\arcsin \frac{3}{4} \right) \cdot \cos \left(\arccos \frac{3}{4} \right) = \\ &= \frac{3}{4} \cos \left(\arcsin \frac{3}{4} \right) - \frac{3}{4} \sin \left(\arccos \frac{3}{4} \right) = \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{3}{4} \right)} - \frac{3}{4} \sqrt{1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{3}{4} \right)} = \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{9}{16}} - \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{значит, } \arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\frac{\pi}{2} > \arcsin \frac{3}{4} > \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} > \arccos \frac{3}{4} > 0, \text{ тогда}$$

$$\frac{3\pi}{4} > \arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} > \frac{\pi}{4},$$

что возможно только при $k = 0$, тогда

$$\arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{1}.$$

Примечание. Зная тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, можно было бы уместить решение в одну строку.

$$2) \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right).$$

$$\text{Пусть } \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha, \arcsin \frac{15}{17} = \beta,$$

$$\text{тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \sin \beta = \frac{15}{17}; \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \quad \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$$

Найдем $\sin 2\alpha$ и $\operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)$, а затем перемножим.

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ значит } \cos \alpha = 2 \sin \alpha;$$

$$\cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha; \quad 1 - \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha;$$

$$1 = 5 \sin^2 \alpha; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\sin \alpha > 0, \text{ так как } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \right);$$

$$\cos \alpha = 2 \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Итак, } \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{б) } \sin \beta = \frac{15}{17};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$\left(\cos \beta > 0, \text{ так как } \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \right);$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} = \frac{\frac{15}{17}}{1 + \frac{8}{17}} = \frac{15}{17 + 8} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\text{Значит, } \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = \boxed{0,48}.$$

Решение карточки 10

1. Вычислите:

$$1) (6 \operatorname{tg}^2 30^\circ + 2 \cos 180^\circ) \cdot \sin 93^\circ = \\ = \left(6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2 \cdot (-1) \right) \cdot \sin 93^\circ = \left(\frac{6}{3} - 2 \right) \cdot \sin 93^\circ = \boxed{0}.$$

$$2) \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 160^\circ \cdot \cos 100^\circ \cdot \sin 150^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cdot \cos 99^\circ} = \\ = \frac{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \frac{1}{2} \cos 160^\circ \cdot \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cdot \cos 99^\circ} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 9^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 9^\circ} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(20^\circ + 10^\circ)}{\sin(21^\circ + 9^\circ)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$3) 128 \cdot \sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \sin^2 80^\circ = \\ = 128 \sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 80^\circ = \\ = 3 \cdot 32 \sin^2 20^\circ \cdot \sin^2 40^\circ \cdot \sin^2 80^\circ;$$

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \sin 40^\circ \cdot (\sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ) = \\ = \cos 50^\circ \cdot (\cos 10^\circ \cos 70^\circ) = \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \\ = \frac{1}{2} \cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \\ = \frac{1}{4} (\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \\ = \frac{1}{4} (\cos 130^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \\ = \frac{1}{4} (-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Значит, } 3 \cdot 32 (\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ)^2 = 3 \cdot 32 \cdot \frac{3}{64} = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

$$4) \frac{\sin^4 3 + \cos^4 3 - 1}{\cos^6 3 + \sin^6 3 - 1} : \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin^4 3 + \cos^4 3 - 1 &= \\ &= (\sin^2 3)^2 + (\cos^2 3)^2 + \\ &\quad + 2 \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 - 1 - 2 \cos^2 3 \cdot \sin^2 3 = \\ &= (\sin^2 3 + \cos^2 3)^2 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 = \\ &= 1 - 1 - \frac{1}{2} \sin^2 6 = -\frac{1}{2} \sin^2 6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin^6 3 + \cos^6 3 - 1 &= (\cos^2 3)^3 + (\sin^2 3)^3 - 1 = \\ &= (\sin^2 3 + \cos^2 3)(\cos^4 3 + \sin^4 3 - \sin^2 3 \cdot \cos^2 3) - 1 = \\ &= \cos^4 3 + \sin^4 3 - \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 - 1 = \\ &= (\sin^2 3 + \cos^2 3)^2 - 2 \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 - \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 - 1 = \\ &= 1 - 3 \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 - 1 = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot 4 \sin^2 3 \cdot \cos^2 3 = -\frac{3}{4} \sin^2 6. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\sin^4 3 + \cos^4 3 - 1}{\cos^6 3 + \sin^6 3 - 1} : \frac{1}{3} = \frac{-\frac{1}{2} \sin^2 6}{-\frac{3}{4} \sin^2 6} : \frac{1}{3} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \boxed{2}.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Произведем замену:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \\ &= 2(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \geq 2;$$

$$\text{значит } 2(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \geq 4; \quad 2(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 2 \geq 6.$$

Итак, $f(\alpha) \geq 6$, т. е. $f_{\min}(\alpha) = 6$.

3. Вычислите:

$$1) \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{0,5}.$$

$$2) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right).$$

Обозначим $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$, а $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) = \beta$,

тогда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$; $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$.

а) Вычислим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{16}{25}}}{\frac{8}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

б) $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}$; $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$, значит

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} 2\beta}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} 2\beta} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{6} + \frac{8}{6}}{1 - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}} = \boxed{5,5}.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(3\pi x), \quad 2,4 < x < 3,2.$$

$$\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \operatorname{tg}(\pi x + 2\pi x);$$

$$\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x)}{1 - \operatorname{tg}(\pi x) \cdot \operatorname{tg}(2\pi x)}.$$

а) Пусть $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) \neq 0$
(обозначим это условие (*)), тогда

$$1 = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}(\pi x) \cdot \operatorname{tg}(2\pi x)};$$

$$1 - \operatorname{tg}(\pi x) \cdot \operatorname{tg}(2\pi x) = 1; \quad \operatorname{tg}(\pi x) \cdot \operatorname{tg}(2\pi x) = 0.$$

1. $\operatorname{tg}(\pi x) = 0; \quad \pi x = \pi k; \quad x = k | k \in \mathbb{Z};$
 $x = 3 \in (2,4; 3,2)$ при $k = 3$ не удовлетворяет
условию (*);

2. $\operatorname{tg}(2\pi x) = 0; \quad 2\pi x = \pi k | k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{k}{2};$
 $x = 2,5 \in (2,4; 3,2)$ при $k = 5;$
 $x = 3 \in (2,4; 3,2)$ при $k = 6$ не удовлетворяет
условию (*).

б) Пусть $\operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{tg}(2\pi x) = 0$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\sin(3\pi x) = 0; \quad 3\pi x = \pi k | k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{k}{3}.$$

$$x = 2\frac{2}{3} \in (2,4; 3,2) \text{ при } k = 8;$$

$$x = 3 \in (2,4; 3,2) \text{ при } k = 9.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2,5; 2\frac{2}{3}; 3 \right\}.$$

$$2) 2 \cos^2(\pi x) = \sqrt{2} \sin(\pi x); \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

$$2(1 - \sin^2(\pi x)) = \sqrt{2} \sin(\pi x); \quad 2 - 2 \sin^2(\pi x) = \sqrt{2} \sin(\pi x);$$

$$2 \sin^2(\pi x) + \sqrt{2} \sin(\pi x) - 2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно $\sin(\pi x)$:

$$\sin(\pi x) = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{4} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{4} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4}.$$

$$a) \sin(\pi x) = -\sqrt{2} \notin [-1; 1] \quad \emptyset;$$

$$b) \sin(\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \pi x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad x = \frac{1}{4} + 2k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\pi x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \quad x = \frac{3}{4} + 2k; \quad x = \frac{1}{4}; \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{4}.$$

$$3) \sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$1,5 < x < 3.$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) = \frac{1}{4};$$

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(-\left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \right) = \frac{1}{2};$$

$$\sin(\pi x) \cdot (-\cos(\pi x)) = \frac{1}{2}; \quad -\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) = \frac{1}{2};$$

$$2\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) = -1; \quad \sin(2\pi x) = -1;$$

$$2\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = -\frac{1}{4} + k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x_1 = \frac{7}{4} \quad (k=2); \quad x_2 = \frac{11}{4} \quad (k=3);$$

$$x_1, x_2 \in (1,5; 3).$$

$$\text{Ответ: } \{1,75; 2,75\}.$$

Решение карточки 11

1. Вычислите:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{6 \sin 390^\circ \cdot \cos(-390^\circ)}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} = \frac{6 \sin 390^\circ \cdot \cos 390^\circ}{\cos 60^\circ} = \\ & = \frac{6 \sin(360^\circ + 30^\circ) \cdot \cos(360^\circ + 30^\circ)}{\cos 60^\circ} = \\ & = \frac{6 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{3 \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 3 \operatorname{tg} 60^\circ = \boxed{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sin^6 15^\circ + 3 \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ + \cos^6 15^\circ = \\ & = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)(\sin^4 15^\circ - \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ + \cos^4 15^\circ) + \\ & \quad + 3 \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ = \\ & = \sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ + 2 \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ = \\ & = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)^2 = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$3) \quad \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \\ & = \frac{2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \\ & = \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \\ & = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \\ & = \sin(90^\circ - 70^\circ) \cdot \sin(90^\circ - 50^\circ) \cdot \sin(90^\circ - 10^\circ) = \\ & = \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ = \\ & = \frac{1}{2} \cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \\ & = \frac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \\ & = \frac{1}{4}(\cos 130^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} (\cos(180^\circ - 50^\circ) + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
 &= \frac{1}{4} (-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{8}} = \boxed{\sqrt{3}}$.

4) $\sqrt{26} \cos \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad -\frac{5}{12} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$-5 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 24 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad 24 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right);$$

$$24 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 5; \quad 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 24 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 5 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 25}}{5} = \frac{12 \pm \sqrt{169}}{5} = \frac{12 \pm 13}{5};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5 \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5} \end{cases};$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0,$$

значит, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5}$ не подходит.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \right).$$

Поэтому $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Значит, $\sqrt{26} \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \boxed{1}$.

5) $\sqrt{3} \sin 2\alpha + \sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

а) Найдем $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha < 0, \text{ поэтому } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = -\frac{1}{7}.$$

б) $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \sin \frac{\alpha}{2} > 0,$

$$\text{значит, } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{7}}{2}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}.$$

в) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, значит,

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{8\sqrt{3}}{49}.$$

г) $\sqrt{3} \sin 2\alpha + \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{8\sqrt{3}}{49}\right) + \frac{2}{7}\sqrt{7} = \frac{14\sqrt{7} - 24}{49}.$

Ответ: $\sqrt{3} \sin 2\alpha + \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{14\sqrt{7} - 24}{49}.$

6) $\frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg}(-1) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) =$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

7) $\sin \left(2 \arcsin \frac{4}{5} \right).$

Обозначим $\arcsin \frac{4}{5} = \alpha$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right).$

Найдем $\sin 2\alpha$.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(2\pi x) = 3 \text{ при } 10 \leq x \leq 11.$$

Для любых x $2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 2$ и $\cos(2\pi x) \leq 1$,

значит, для любых x $2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(2\pi x) \leq 3$.

Очевидно, что для корней уравнения одновременно должны выполняться равенства $2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2$

и $\cos(2\pi x) = 1$.

$$a) 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2; \quad \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0;$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = 1 + 2k, \text{ по условию } x = 11 \quad (k = 5).$$

$$b) \cos(2\pi x) = 1; \quad 2\pi x = 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = n; \text{ по условию } x = n = 10 \text{ или } x = n = 11.$$

Одновременно с первым равенством решением является только $x = 11 \in [10; 11]$.

Ответ: $x = 11$.

$$2) 5\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{3}\right) - \cos^{-2}\left(2\pi + \frac{\pi x}{3}\right) = 3 \text{ при } 1 \leq x \leq 4;$$

Так как $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, то

$$5\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3} - \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}\right) = 3; \quad \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3} = 1.$$

$$a) \operatorname{tg}\frac{\pi x}{3} = 1; \quad \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{3}{4} + 3k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $x \in [1; 4]$, замечаем, что подходит только $k = 1$, $x = 3,75$.

$$b) \operatorname{tg}\frac{\pi x}{3} = -1; \quad \frac{\pi x}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{3}{4} + 3n.$$

Тут подходит только $n = 1$, $x = 2,25$.

Ответ: $\{2,25; 3,75\}$.

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = x^2 - 3x - 4,5.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} & (4.6) \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} & (5.9) \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} & (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} \right) - \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)}; \\ \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} \right) &= \frac{1 - \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right)}{\sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right)} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 0,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos \frac{3}{5} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ значит } \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) &= \\ = \sqrt{1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{3}{5} \right)} &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = \frac{4}{5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) &= \frac{1}{\operatorname{ctg} (2 \operatorname{arctg} (-0,5))} = \\ = \frac{2 \operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} (-0,5))}{\operatorname{ctg}^2 (\operatorname{arctg} (-0,5)) - 1} &= \frac{-1}{0,25 - 1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) &= \\ = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} &= -0,5. \end{aligned}$$

Получаем уравнение $x^2 - 3x - 4,5 = -0,5$;

$$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 4\}$.

Решение карточки 12

1. Вычислите:

$$\begin{aligned} 1) & (2 \cos 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \operatorname{ctg} 960^\circ)^{-1} = \\ & = \left(\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1} = \left(\frac{3+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \right)^{-1} = \\ & = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \right)^{-1} = \left(\frac{16\sqrt{3} - 3}{12} \right)^{-1} = \frac{12}{16\sqrt{3} - 3} = \\ & = \frac{12(16\sqrt{3} + 3)}{256 \cdot 3 - 9} = \frac{4(16\sqrt{3} + 3)}{256 - 3} = \boxed{\frac{4(16\sqrt{3} + 3)}{253}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & \sin 167^\circ \cdot \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \cdot \sin 197^\circ = \\ & = \sin(180^\circ - 13^\circ) \cdot \sin(90^\circ + 17^\circ) + \\ & \quad + \sin(270^\circ - 13^\circ) \cdot \sin(180^\circ + 17^\circ) = \\ & = \sin 13^\circ \cdot \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cdot \cos 13^\circ = \\ & = \sin(17^\circ + 13^\circ) = \sin 30^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & \cos 17^\circ \cdot \cos 73^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ = \\ & = \cos 17^\circ \cdot \sin 17^\circ - \sin 13^\circ \cdot \cos 21^\circ - \cos 4^\circ \cdot \cos 86^\circ = \\ & = \frac{1}{2} \sin 34^\circ - \frac{1}{2} (\sin 34^\circ - \sin 8^\circ) - \cos 4^\circ \cdot \sin 4^\circ = \\ & = \frac{1}{2} \sin 34^\circ - \frac{1}{2} \sin 34^\circ + \frac{1}{2} \sin 8^\circ - \frac{1}{2} \sin 8^\circ = \boxed{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) & \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \\ & = \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2} (2 \cos 10^\circ \cdot \cos 70^\circ) = \\ & = \frac{1}{2} \cos 50^\circ \cdot (\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \\ & = \frac{1}{2} \cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} (\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4} \cos 50^\circ = \\
 &= \frac{1}{4} \cos 130^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ + \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \\
 &= -\frac{1}{4} \cos 50^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ + \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}.
 \end{aligned}$$

5) $\sin 18^\circ$.

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ;$$

$$\cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ;$$

$$\begin{aligned}
 \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha = \\
 &= \sin \alpha \cdot (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\
 &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$\sin 54^\circ = \sin(3 \cdot 18^\circ) = \cos(2 \cdot 18^\circ);$$

$$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ;$$

$$4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0;$$

$$\text{Обозначим } a = \sin 18^\circ, \text{ тогда } 4a^3 - 2a^2 - 3a + 1 = 0;$$

$$\text{Очевидно, } a = 1 \text{ является корнем: } 4 - 2 - 3 + 1 = 0.$$

Разделим:

$$\begin{array}{r}
 4a^3 - 2a^2 - 3a + 1 \quad | \quad a - 1 \\
 \underline{4a^3 - 4a^2} \\
 2a^2 - 3a + 1 \\
 \underline{2a^2 - 2a} \\
 -a + 1 \\
 \underline{-a + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{Значит, } (\sin 18^\circ - 1) \cdot (4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0;$$

$$\sin 18^\circ \neq 1, \text{ значит } 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0;$$

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{array} \right];$$

$$\text{а) } \sin 18^\circ = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0 \text{ не подходит, так как } \sin 18^\circ > 0 \\ (0^\circ < 18^\circ < 90^\circ).$$

$$\text{б) Значит, } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$6) A(\alpha) = \frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$A(\alpha) = \frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha} = \\ = \frac{\cos^2 \alpha \cdot (2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{\cos^2 \alpha \cdot (3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2)} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \\ = \frac{\sqrt{5} - 1}{1 - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 1} = 2.$$

$$\text{Итак, } A(\alpha) = \frac{2 \cdot 2^2 - 2}{3 \cdot 2^2 + 2} = \frac{6}{14} = \boxed{\frac{3}{7}}.$$

$$7) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha, \text{ если } \sin 4\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ при } \frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Пусть } A(\alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \\ = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha.$$

$$\text{Так как } \frac{\pi}{2} < 4\alpha < \pi, \text{ то } \cos 4\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 4\alpha},$$

$$\text{т.е. } \cos 4\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Тогда $\sin 2\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}}$, так как $\frac{\pi}{4} < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Значит, $\sin 2\alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Таким образом, $A(\alpha) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{0,5}$.

$$\begin{aligned} 8) \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} + \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}{\sqrt{\operatorname{ctg} 5^\circ} - \sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}} &= \\ &= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\frac{1+\operatorname{tg} 5^\circ}{\sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}}{\frac{1-\operatorname{tg} 5^\circ}{\sqrt{\operatorname{tg} 5^\circ}}} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{1 + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 5^\circ} = \\ &= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\frac{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}}{\frac{\cos 5^\circ - \sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ}{\cos 5^\circ - \cos 85^\circ} = \\ &= \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 40^\circ}{2 \sin 45^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \operatorname{ctg} 40^\circ - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \boxed{0}. \end{aligned}$$

2. Решите уравнения:

1) $\sin^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{4}$

при $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{2} \sin \pi x \cdot (-\cos \pi x) = \frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{2} \sin 2\pi x = \frac{1}{2}; \quad \sin 2\pi x = -1;$$

$$2\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} + k \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}; \quad x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

$$2) \cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = x^2 - 4x - 5.$$

$$\operatorname{arctg} 7 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \quad \operatorname{arctg} 3 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$a) \cos(2 \operatorname{arctg} 7) = 2 \cos^2(\operatorname{arctg} 7) - 1;$$

$$\cos(\operatorname{arctg} 7) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 7)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}.$$

$$\text{Тогда } \cos(2 \operatorname{arctg} 7) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2 - 1 = -\frac{24}{25}.$$

$$6) \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = 2 \sin(2 \operatorname{arctg} 3) \cdot \cos(2 \operatorname{arctg} 3).$$

$$\sin(2 \operatorname{arctg} 3) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 3)} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{3}{5};$$

$$\cos(2 \operatorname{arctg} 3) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 3)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 3)} = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5},$$

$$\text{тогда } \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Итак, } \cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = -\frac{24}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = 0,$$

$$\text{и уравнение принимает вид } 0 = x^2 - 4x - 5; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ответ: $\{-1; 5\}$.

Решение карточки 13

1. Решите уравнения:

$$1) \sqrt{3} + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \text{ при } 8 < x < 20.$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{\pi x}{9} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k;$$

$$x = \pm\frac{5}{6} \cdot 9 + 2k \cdot 9; \quad x = \pm 7,5 + 18k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } 8 < \pm 7,5 + 18k < 20;$$

$$\begin{cases} 0,5 < 18k < 12,5 & k \in \emptyset \\ 15,5 < 18k < 27,5 & k = 1 \end{cases}; \quad x = 18 - 7,5 = 10,5.$$

$$\text{Ответ: } x = 10,5.$$

$$2) \sin(x - 30^\circ) \cdot \cos 2x = \sin(x - 30^\circ).$$

$$\sin(x - 30^\circ) \cdot (\cos 2x - 1) = 0; \quad \begin{cases} \sin(x - 30^\circ) = 0; \\ \cos 2x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - 30^\circ = 180^\circ k \\ 2x = 360^\circ n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 30^\circ + 180^\circ k \\ x = 180^\circ n \end{cases} \mid n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{30^\circ + 180^\circ k; 180^\circ n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3) \frac{5}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x.$$

$$\frac{2}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = 3 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \cos x \quad (\cos x \neq 0);$$

$$\frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{3} \cos x; \quad 2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0;$$

$$\cos x \cdot (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0; \quad \text{разделим на } \cos x \neq 0;$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \cos 3x = \sin 2x.$$

$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin 2x = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi k \\ \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n \end{cases} | k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \frac{\sin 6x}{\sin 4x} = 1 \text{ при } 170^\circ < x < 200^\circ.$$

$$\begin{cases} \sin 6x - \sin 4x = 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \sin \frac{6x - 4x}{2} \cdot \cos \frac{6x + 4x}{2} = 0 \\ 4x \neq 180^\circ p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \\ x \neq 45^\circ p \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 180^\circ k \\ 5x = 90^\circ + 180^\circ n \end{cases} \\ x \neq 45^\circ p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 180^\circ k \\ x = 18^\circ + 36^\circ n \end{cases} \\ x \neq 45^\circ p \end{cases}; \quad x = 18^\circ + 36^\circ n.$$

По условию

$$170^\circ < 18^\circ + 36^\circ n < 200^\circ; \quad 152^\circ < 36^\circ n < 182^\circ;$$

при $n = 5$ $152^\circ < 180^\circ < 182^\circ$, значит,

$$x = 180^\circ + 18^\circ = 198^\circ \pm 45^\circ p.$$

Ответ: $x = 198^\circ$.

$$6) \cos(70^\circ + x) \cdot \cos(20^\circ - x) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} [\cos(70^\circ + x - 20^\circ + x) + \cos(70^\circ + x + 20^\circ - x)] = \frac{1}{2};$$

$$\cos(2x + 50^\circ) + \cos 90^\circ = 1;$$

$$\cos(2x + 50^\circ) = 1; \quad 2x + 50^\circ = 360^\circ k;$$

$$x = -25^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{-25^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$7) \sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x.$$

$$\sin x \cdot (1 + 2 \cos x) - \cos x \cdot (1 + 2 \cos x) = 0;$$

$$(1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) \cos 2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2,5.$$

$$1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 2,5;$$

$$2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 1 + 2,5 = 0.$$

$$\text{Положим } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = t, \text{ тогда}$$

$$2t^2 - 4t + 1,5 = 0; \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \notin [-1; 1] \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{или } \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2};$$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x;$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos x - 2 \cos 7x \cdot \cos x = 0;$$

$$2 \cos x \cdot (\cos 3x - \cos 7x) = 0; \quad 2 \cos x \cdot 2 \sin 5x \cdot \sin 2x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 5x = 0; \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{5}n \\ x = \frac{\pi}{2}t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{5}n \\ x = \frac{\pi}{2}t \end{cases} \mid n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{5}n; \frac{\pi}{2}t \mid n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

$$\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) \sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2; \quad t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Очевидно, $t = 1$ — корень. Разделим на $t - 1$:

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 2t^2 + 3t - 2 & t - 1 \\ \hline t^3 - t^2 & \\ \hline -t^2 + 3t & \\ -t^2 + t & \\ \hline 2t - 2 & \\ -2t + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$t^2 - t + 2 = 0$; $D < 0$, остается один корень.

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Докажите тождество

$$\frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \\ \Pi &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

3. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} + 1$.

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}+1}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 1 - 1}{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1} = \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2(2 + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1.$$

4. Решите неравенство $\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 6 \sin x - 1$.

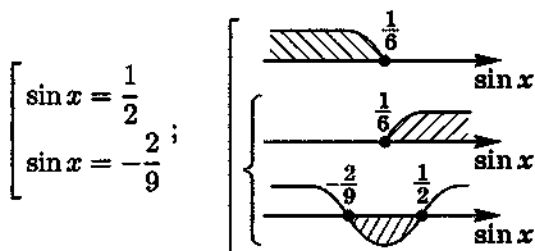
$$\begin{cases} 6 \sin x - 1 \geq 0 \\ 5 - 2 \sin x \geq (6 \sin x - 1)^2 \\ \sin x \leq \frac{1}{6} \\ 5 - 2 \sin x \geq 0 \quad \forall x \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{6} \\ 36 \sin^2 x - 10 \sin x \leq 4; \\ \sin x \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

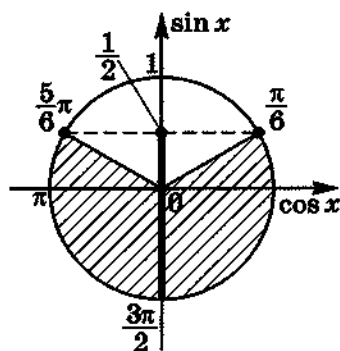
$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{6} \\ 18 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 \leq 0. \\ \sin x \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $18 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 \leq 0$.

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2 \cdot 18} = \frac{5 \pm 13}{36};$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x \leq \frac{1}{6} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ \sin x \geq \frac{1}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: $\left\{ \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{13\pi}{6} + 2\pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

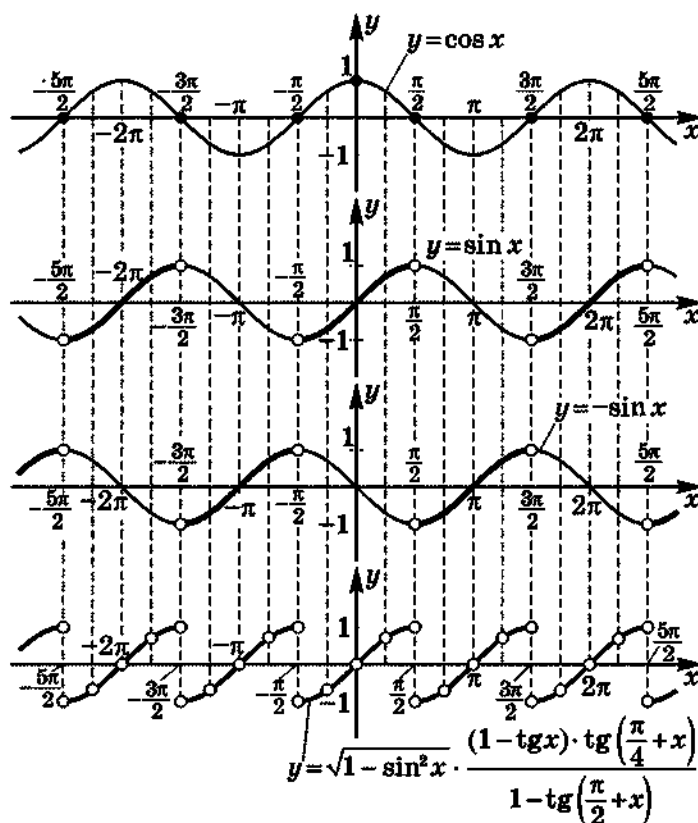
5. Постройте график:

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}.$$

$$y = |\cos x| \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{ctg} x} = |\cos x| \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= |\cos x| \cdot \operatorname{tg} x = \begin{cases} \sin x, & \cos x > 0 \\ -\sin x, & \cos x < 0 \end{cases}.$$

$$D(y): \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \operatorname{ctg} x \neq -1 \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{4} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$



Решение карточки 14

1. Решите уравнения:

$$1) 1 + 2 \sin \frac{\pi x}{3} = 0 \text{ при } 2 < x < 4.$$

$$\sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi x}{3} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k;$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{1}{2} + 3k.$$

$$\text{По условию } 2 < (-1)^{k+1} \frac{1}{2} + 3k < 4.$$

При $k = 1$ $2 < 3,5 < 4$, других таких целых k не существует.

Ответ: $x = 3,5$.

$$2) \cos 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x.$$

$$\cos 2x \cdot (\sin 3x - 1) = 0; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin 2x = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin x.$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \sin 2x + \cos 3x = 0 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin 2x + \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{2x + 3x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{3x - 2x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi k \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \notin \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} | k, n \in \mathbb{Z};$$

$$0 < -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{10} < \frac{2\pi}{5}k < \frac{3\pi}{5};$$

$$\text{при } k = 1 \quad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{3\pi}{10} \right\}.$$

$$5) \cos 5x + \cos x = -2 \cos 3x.$$

$$2 \cos \frac{5x + x}{2} \cdot \cos \frac{5x - x}{2} + 2 \cos 3x = 0;$$

$$2 \cos 3x \cdot (\cos 2x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} | k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k; \frac{\pi}{2} + \pi n | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) 2 \sin(40^\circ + x) \cdot \sin(50^\circ - x) = -1.$$

$$\cos(40^\circ + x - 50^\circ + x) - \cos(40^\circ + x + 50^\circ - x) = -1;$$

$$\cos(2x - 10^\circ) = -1; \quad 2x - 10^\circ = 180^\circ + 360^\circ k;$$

$$x = 95^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{95^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$7) \sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

$$\sin 4x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x);$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0; \quad \begin{cases} 2 \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) 8 \cos^4 x = 11 \cos 2x - 1.$$

$$8 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = 11 \cos 2x - 1;$$

$$2(1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) = 11 \cos 2x - 1;$$

$$2 \cos^2 2x - 7 \cos 2x + 3 = 0;$$

$$\cos 2x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}.$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 3 \notin [-1; 1] \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \cos \frac{4x}{3} + \sin^2 \frac{3x}{2} + 2 \sin^2 \frac{5x}{6} = \cos^2 \frac{3x}{2}.$$

$$\cos \frac{4x}{3} + \sin^2 \frac{3x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} + 1 - \cos \frac{5x}{3} = 0;$$

$$\cos \frac{4x}{3} - \cos 3x + 1 - \cos \frac{5x}{3} = 0;$$

$$2 \sin \frac{\frac{4x}{3} + \frac{5x}{3}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{5x}{3} - \frac{4x}{3}}{2} + 2 \sin^2 \frac{3x}{2} = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \left(\sin \frac{x}{6} + \sin \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ 2 \sin \frac{\frac{x}{6} + \frac{3x}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{6}}{2} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ \sin \frac{5x}{6} = 0; \\ \cos \frac{2x}{3} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{6\pi}{5}n \\ x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{3}k; \frac{6\pi}{5}n; \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0; \quad (\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases} \quad | k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) \frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0; \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x \neq \pi + 2\pi k.$$

$$\frac{\sin^2 x - 2}{4 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 1 \right)} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2};$$

$$\sin^2 x - 2 = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(-4 \cos^4 \frac{x}{2} \right);$$

$$\sin^2 x - 2 = -4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}; \quad \sin^2 x - 2 = -\sin^2 x;$$

$$\sin^2 x = 1; \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}; \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2. \text{ Докажите тождество } \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2} \\ \Pi &= \sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите

$$\sin(\alpha - 2\beta), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2,4; \quad \operatorname{tg} \beta = -0,75 \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin(\alpha - 2\beta) = \sin \alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos \alpha.$$

Найдем $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$.

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \sin \alpha = \frac{2,4}{\sqrt{1 + (2,4)^2}} = \frac{2,4}{2,6} = \frac{12}{13};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16 - 9}{16 + 9} = \frac{7}{25};$$

$$\sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{9}{16}} = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Итак, } \sin(\alpha - 2\beta) = \frac{12}{13} \cdot \frac{7}{25} - \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{84 + 120}{13 \cdot 25} = \boxed{\frac{204}{325}}.$$

4. Решите неравенство $\sqrt{7 - 18 \operatorname{tg} x} \geq 6 \operatorname{tg} x + 11$.

Положим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда неравенство равносильно системе

$$\left[\begin{cases} 6t + 11 \geq 0 \\ 7 - 18t \geq (6t + 11)^2 \\ 6t + 11 < 0 \\ 7 - 18t \geq 0 \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{cases} t \geq -\frac{11}{6} \\ 36t^2 + 132t + 121 \leq 7 - 18t \\ t < -\frac{11}{6} \\ t \leq \frac{7}{18} \end{cases} \right];$$

$$\left[\begin{cases} t \geq -1\frac{5}{6} \\ 6\left(t + 3\frac{1}{6}\right)(t + 1) \leq 0; \\ t < -1\frac{5}{6} \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{array}{c} \text{График функции } y = 6\left(t + 3\frac{1}{6}\right)(t + 1) \\ \text{с нулями в } t = -3\frac{1}{6} \text{ и } t = -1. \\ \text{Затенены области: } t \leq -3\frac{1}{6} \text{ и } -1 \leq t < -1\frac{5}{6}. \end{array} \right] \quad t \leq -1.$$

Итак, $t = \operatorname{tg} x \leq -1$; $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

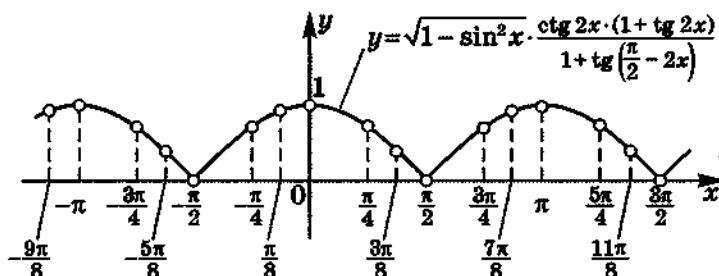
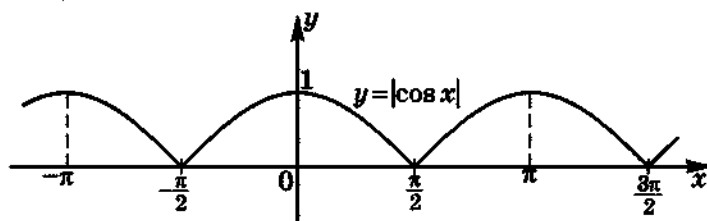
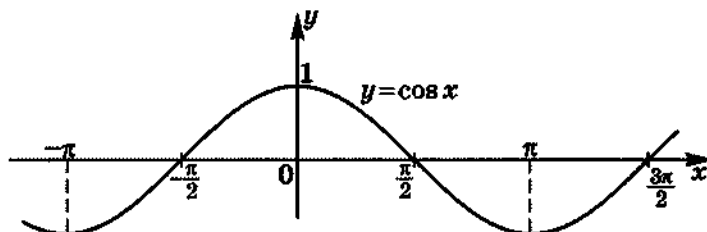
Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Постройте график $y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)}$.

$$y(x) = |\cos x| \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{ctg} 2x} =$$

$$= |\cos x| \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = |\cos x|.$$

$$D(y): \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \operatorname{ctg} 2x \neq -1 \end{cases}; \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x \neq \frac{\pi}{2}n \\ x \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}t \end{cases}.$$



Решение карточки 15

1. Решите уравнения:

1) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$

$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0; \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0;$$

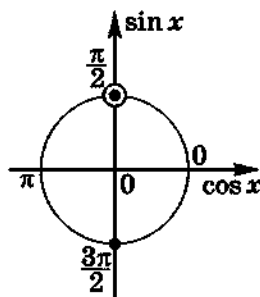
$$\begin{cases} \sin x = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

2) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0.$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$



3) $\sin 2x = \sin 3x.$

$$\sin 2x - \sin 3x = 0; \quad 2 \sin \frac{2x - 3x}{2} \cdot \cos \frac{2x + 3x}{2} = 0;$$

$$\sin \left(-\frac{x}{2} \right) \cdot \cos \frac{5x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \left(-\frac{x}{2} \right) = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = \pi k \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ 2\pi k; \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$4) \cos(2x - 630^\circ) = \sin(4x + 540^\circ) \text{ при } 90^\circ < x < 180^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(2x - 630^\circ) &= \cos(2x - 630^\circ + 720^\circ) = \\ &= \cos(2x + 90^\circ) = -\sin 2x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin(4x + 540^\circ) &= \sin(4x + 540^\circ - 720^\circ) = \\ &= \sin(4x - 180^\circ) = -\sin 4x. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } -\sin 2x = -\sin 4x; \quad \sin 4x - \sin 2x = 0;$$

$$2 \sin \frac{4x - 2x}{2} \cdot \cos \frac{4x + 2x}{2} = 0; \quad \sin x \cdot \cos 3x = 0;$$

$$\begin{cases} x = 180^\circ k \\ 3x = 90^\circ + 180^\circ n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 180^\circ k \\ x = 30^\circ + 60^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } \begin{cases} 90^\circ < 180^\circ k < 180^\circ \\ 90^\circ < 30^\circ + 60^\circ n < 180^\circ \end{cases}.$$

Первое неравенство не выполняется при любых целых k .

Второе выполняется только при $n = 2$, тогда

$$x = 30^\circ + 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ.$$

Ответ: $x = 150^\circ$.

$$5) \sin x + \sin 5x = 2 \cos 2x.$$

$$2 \sin \frac{x + 5x}{2} \cdot \cos \frac{5x - x}{2} - 2 \cos 2x = 0;$$

$$2 \cos 2x \cdot (\sin 3x - 1) = 0; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$6) \cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x.$$

$$\cos 5x + \cos 7x = \sin 7x + \sin 5x;$$

$$2 \cos \frac{5x+7x}{2} \cdot \cos \frac{5x-7x}{2} - 2 \sin \frac{7x+5x}{2} \cdot \cos \frac{7x-5x}{2} = 0;$$

$$2 \cos x \cdot (\cos 6x - \sin 6x) = 0.$$

$$\text{Учитывая, что } \cos 6x = \sin 6x \Rightarrow \operatorname{tg} 6x = 1,$$

$$\text{имеем совокупность: } \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} 6x = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 6x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6} n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6} n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) \sin x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$8) 2 \sin x \cdot \sin 8x = \cos 7x.$$

$$\cos(x-8x) - \cos(x+8x) = \cos 7x;$$

$$\cos 9x = 0; \quad 9x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x;$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{3}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{6} - x + \frac{\pi}{3}}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \\ x = -\frac{\pi}{12} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{12} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x;$$

$$\sin 4x \cdot \cos 8x = \sin 12x;$$

$$\frac{1}{2} (\sin 12x - \sin 4x) = \sin 12x; \quad \sin 4x + \sin 12x = 0;$$

$$2 \sin 8x \cdot \cos 4x = 0; \quad \begin{cases} 8x = \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8}k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) \sin^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}.$$

$$D(Y): x \neq \frac{\pi}{2}k.$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x + \cos^2 x \cdot \sin x = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x};$$

$$L = (\sin x + \cos x) \times$$

$$\times (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x) =$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x),$$

$$\text{тогда } \sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}.$$

$$\text{Положим } \sin x + \cos x = t; \quad t \geq 0;$$

$$1 + 2\sin x \cdot \cos x = t^2, \quad \text{тогда } \sin x \cdot \cos x = \frac{-1 + t^2}{2},$$

и уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 2(-1 + t^2) \end{cases}; \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 2 \end{cases}; \quad t = \sqrt{2}.$$

$$\text{Итак, } \sin x + \cos x = \sqrt{2}; \quad \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2};$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$12) \cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

$$2 \sin \frac{x+2x}{2} \cdot \sin \frac{2x-x}{2} - 2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 ; \\ \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{3}\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Докажите тождество

$$1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 6\alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\begin{aligned} L &= (1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 6\alpha) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{\sin \alpha + 2 \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cos 4\alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cos 6\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha}; \quad \sin \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} \\ \Pi &= \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 4 \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ} = \\ &= \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

4. Постройте график: $y(x) = \sin x \cdot \sqrt{\sin^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{\cos^2 x}$.

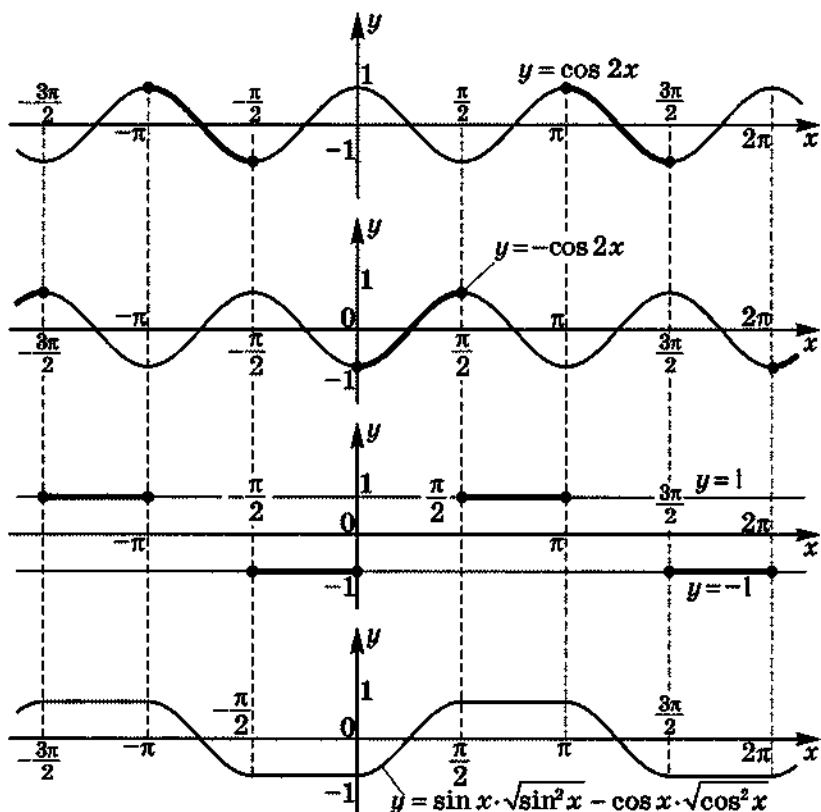
$$y(x) = \sin x \cdot |\sin x| - \cos x \cdot |\cos x|;$$

а) $x \in \text{I}$ четверти: $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$;

б) $x \in \text{II}$ четверти: $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

в) $x \in \text{III}$ четверти: $y = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x$;

г) $x \in \text{IV}$ четверти: $y = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$.



Решение карточки 16

1. Решите уравнения:

1) $2 \sin^2 2x + 7 \sin 2x - 4 = 0.$

$$(\sin 2x)_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4};$$

$$\begin{cases} \sin 2x = -4 \notin [-1; 1] \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \sin 2x = \frac{1}{2};$$

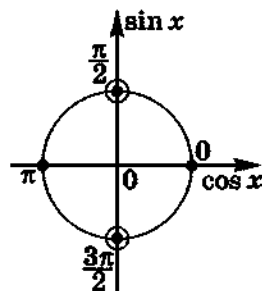
$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0.$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x \neq -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \pi k \\ 2x \neq \pi + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} k \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad x = \pi t \mid t \in \mathbb{Z};$$



$$\text{Ответ: } \{ \pi t \mid t \in \mathbb{Z} \}.$$

3) $\cos \frac{x}{3} = \cos 2x.$

$$\cos \frac{x}{3} - \cos 2x = 0; \quad 2 \sin \frac{\frac{x}{3} + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x - \frac{x}{3}}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \frac{7x}{6} = 0 \\ \sin \frac{5x}{6} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{6\pi}{7} k \\ x = \frac{6\pi}{5} t \end{cases} \mid k, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{6\pi}{7} k; \frac{6\pi}{5} t \mid k, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \sin(3x - 450^\circ) = \sin(6x - 540^\circ) \text{ при } 0^\circ < x < 45^\circ.$$

$$2 \sin \frac{6x - 540^\circ - 3x + 450^\circ}{2} \cdot \cos \frac{3x - 450^\circ + 6x - 540^\circ}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3x}{2} - 45^\circ\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x}{2} - 135^\circ\right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{3x}{2} - 45^\circ = 180^\circ k \\ \frac{9x}{2} - 135^\circ = 90^\circ + 180^\circ n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 120^\circ k \\ x = 50^\circ + 40^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } \begin{cases} 0 < 30^\circ + 120^\circ k < 45^\circ \\ 0 < 50^\circ + 40^\circ n < 45^\circ \end{cases}.$$

Неравенства выполняются при $n = -1$ или $k = 0$:

$$\begin{cases} x = 30^\circ \in (0^\circ; 45^\circ) \\ x = 10^\circ \in (0^\circ; 45^\circ) \end{cases}.$$

Ответ: $\{10^\circ; 30^\circ\}$.

$$5) \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1 \text{ при } 170^\circ < x < 280^\circ.$$

$$\begin{cases} \cos 3x = \sin 2x \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 3x - \cos(2x - 90^\circ) = 0 \\ 2x \neq \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{3x + 2x - 90^\circ}{2} \cdot \sin \frac{3x - 2x + 90^\circ}{2} = 0 \\ x \neq 90^\circ k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin\left(\frac{5x}{2} - 45^\circ\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) = 0 \end{cases} \\ x \neq 90^\circ k \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} x = 18^\circ + 72^\circ n \\ x = -90^\circ + 360^\circ t \end{cases} \\ x \neq 90^\circ k \end{cases} \mid k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } \begin{cases} 170^\circ < 18^\circ + 72^\circ n < 280^\circ \\ 170^\circ < -90^\circ + 360^\circ k < 280^\circ \end{cases}.$$

Подходят значения $k = 1$ (тогда $x = 270^\circ \notin \text{ОДЗ!}$) и $n = 3$ — в этом случае $x = 234^\circ$.

Ответ: $x = 234^\circ$.

$$6) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

$$2 \sin \frac{x+3x}{2} \cdot \cos x + 2 \sin 3x \cdot \cos x = 0;$$

$$2 \cos x \cdot (\sin 2x + \sin 3x) = 0;$$

$$2 \cos x \cdot 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin \frac{5x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{2\pi}{5}n \\ x = \pi + 2\pi t \end{cases} \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{2\pi}{5}n; \pi + 2\pi t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) \sin 2x + \cos 2x = -1.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1;$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) 2 \sin 2x \cdot \cos x = \sin 3x.$$

$$\sin 3x + \sin x = \sin 3x; \quad \sin x = 0; \quad x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$9) \sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2} \sin x.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x;$$

$$\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x = 0;$$

$$2 \sin \frac{4x + \frac{\pi}{4} - x}{2} \cdot \cos \frac{4x + \frac{\pi}{4} + x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \\ x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$10) 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x.$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos 4x + 2 \cos^2 2x = \cos 6x;$$

$$\cos 6x + \cos 2x + 2 \cos^2 2x = \cos 6x;$$

$$2 \cos 2x \cdot \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right) = 0; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$11) \sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

$$\text{Положим } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}];$$

$$\text{тогда } 1 + \sin 2x = t^2; \quad \sin 2x = t^2 - 1.$$

$$t^2 - 1 + 5t + 1 = 0; \quad t(t+5) = 0; \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -5 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases};$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0; \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$12) \cos 2x + \cos x = \sin 3x.$$

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0;$$

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \left(\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \frac{3x}{2} \right) = 0;$$

$$2 \cos \frac{3x}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3x}{2} = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0; \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid k, n, t \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi t \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Докажите тождество

$$1 - 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 8\alpha - 2 \cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

$$\begin{aligned} L &= 1 - 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 8\alpha - 2 \cos 12\alpha = \\ &= \frac{\cos 2\alpha - 2 \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 8\alpha - 2 \cos 12\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha - (\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) + \cos 10\alpha + \cos 6\alpha - (\cos 14\alpha + \cos 10\alpha)}{\cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \cos 2\alpha + \cos 10\alpha + \cos 6\alpha - \cos 14\alpha - \cos 10\alpha}{\cos 2\alpha} = \\ &= -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

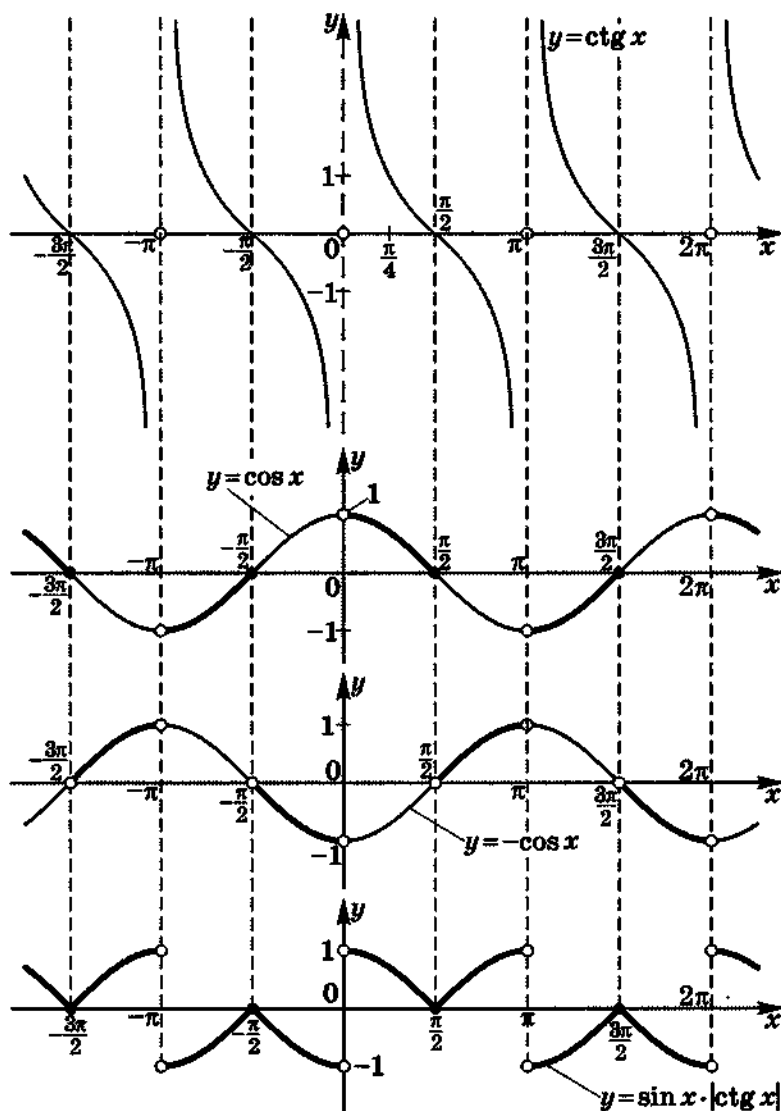
$$\left. \begin{array}{l} L = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha} \\ \Pi = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите $\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin \frac{20^\circ + 40^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \cdot \cos \frac{80^\circ - 40^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. Постройте график $y(x) = \sin x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

$$y = \begin{cases} \cos x, & \operatorname{ctg} x \geq 0, \sin x \neq 0 \\ -\cos x, & \operatorname{ctg} x < 0, \sin x \neq 0 \end{cases}$$



8

Зачетные карточки

Карточка 1

1. Разложите на множители:

1) $\cos \frac{3\alpha}{8} - \cos \frac{7\alpha}{24}$;

2) $\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 6\alpha \cdot \cos 3\alpha$;

3) $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha$.

2. Докажите тождества:

1) $\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = -\cos 4\alpha \cdot \sin \alpha$;

2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

3. Вычислите:

1) $\sin^2 16^\circ + \cos 46^\circ \cdot \cos 14^\circ + 1$;

2) $\frac{1 - 2 \cos^2 13^\circ}{\sin 64^\circ}$;

3) $(\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 54^\circ) \sin 54^\circ + 1,5$;

4) $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}\right)^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7}\right)}$;

- 5) $\frac{\sin \frac{2\pi}{11} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} \right)}{10 \sin \left(\frac{\pi}{11} + \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11} + \frac{2\pi}{7} \right)};$
- 6) $\frac{1 - \sin^2 38^\circ}{2 (\sin 14^\circ + \sin^2 38^\circ)};$
- 7) $\frac{\cos 31^\circ + \cos 89^\circ + 1}{-\cos^2 14^\circ 30'};$
- 8) $\frac{-3 + 2 \sin^2 78^\circ + 2 \sin^2 18^\circ}{5 \sin^2 42^\circ};$
- 9) $\frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2 \cos 14^\circ + 2 \sin 104^\circ};$
- 10) $\frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ};$
- 11) $\frac{\cos 37^\circ - 8 \cos 143^\circ + 2 \sin 127^\circ}{\sin 42^\circ \cdot \sin 79^\circ + \sin 48^\circ \cdot \sin 11^\circ}.$

Карточка 2

1. Разложите на множители:

1) $\cos \frac{5\alpha}{6} + \cos \frac{4\alpha}{15};$

2) $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 8\alpha;$

3) $1 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$

2. Докажите тождества:

1) $\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 6\alpha;$

2) $\frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$

3. Вычислите:

1) $\sin 67^\circ \cdot \sin 7^\circ - \sin^2 37^\circ - 2;$

2) $\frac{1 - 2 \sin^2 46^\circ}{8 \cos 92^\circ};$

3) $\frac{\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{ctg} 31^\circ} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ};$

4) $\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}\right)^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}};$

5) $\frac{\cos \frac{2\pi}{13} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right)}{\sin \frac{\pi}{26} \cdot \sin \frac{3\pi}{26}};$

6) $\frac{1 + \cos 62^\circ - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1;$

7) $\frac{2 \cos^2 42^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ};$

$$8) \frac{2 \cos^2 46^\circ + 2 \cos^2 106^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ};$$

$$9) \frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \sin 44^\circ};$$

$$10) \frac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4 \sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ};$$

$$11) \frac{5 \sin 211^\circ + 8 \cos 59^\circ - 5 \sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ}.$$

Карточка 3

1. Разложите на множители:

- 1) $\sin 2\alpha - \sin(3\alpha + \pi)$;
- 2) $\sin 2\alpha - 2 \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha + \sin 6\alpha$;
- 3) $\cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha - \cos 6\alpha$.

2. Докажите тождества:

- 1) $(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \cos 3\alpha) = 2 \sin \alpha$;
- 2) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

3. Вычислите:

- 1) $\cos^2 41^\circ + \cos 79^\circ \cdot \cos 19^\circ - 1$;
- 2) $\frac{\sqrt{2}(\cos 80^\circ + \sin 80^\circ)}{\sin 125^\circ}$;
- 3) $\frac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4 \operatorname{tg}^2 31^\circ \cdot \sin^2 31^\circ}$;
- 4) $\frac{\sin^4 \frac{\pi}{9} - \cos^4 \frac{\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9}}$;
- 5) $\frac{\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3}}{4 \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}}$;
- 6) $\frac{\operatorname{tg} 34^\circ(1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4 \operatorname{tg} 17^\circ}$;
- 7) $\frac{\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - 2 \sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$;
- 8) $\cos^2 23^\circ - \cos^2 7^\circ + \sin^2 53^\circ - 3$;
- 9) $\frac{2\sqrt{2} \cos 7^\circ + \sqrt{2} \sin 83^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ}$;
- 10) $\frac{\cos 4^\circ - \cos 6^\circ - \cos 8^\circ + \cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ}$;
- 11) $\frac{3 \cos 215^\circ - 4 \cos 35^\circ - 2 \sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ}$.

Карточка 4

1. Упростите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Разложите на множители:

1) $\cos 4\alpha + 2 \cos \alpha \cdot \cos 6\alpha + \cos 8\alpha$;

2) $2 \sin 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$.

3. Докажите тождества:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$;

2) $1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} = \sin 4\alpha$.

4. Вычислите:

1) $\cos^2 84^\circ + \cos 51^\circ \cdot \cos 39^\circ + 3$;

2) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} \cdot 2 \cos^2 75^\circ$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ}{2 \operatorname{ctg}^2 34^\circ \cdot \cos^2 34^\circ}$;

4) $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{11} + \sin \frac{\pi}{11}\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{11}\right)}$;

5) $\frac{\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{24}}$;

6) $\frac{1 + \sin 18^\circ - \cos^2 36^\circ}{2 \cos^2 36^\circ} + \frac{1}{4}$;

7) $\frac{\cos 68^\circ - 2 \cos^2 4^\circ}{2 \cos^2 26^\circ}$;

$$8) \cos^2 19^\circ + \sin^2 11^\circ + \cos^2 41^\circ + 2;$$

$$9) \frac{8 \sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ};$$

$$10) \frac{2\sqrt{2} \sin 22^\circ + 5\sqrt{2} \cos 68^\circ}{\cos 23^\circ - \cos 67^\circ};$$

$$11) \frac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2} \cos 5^\circ \cdot \sin 55^\circ};$$

$$12) \frac{7 \cos 29^\circ - 2 \cos 151^\circ + 4 \sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cdot \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cdot \cos 52^\circ}.$$

Карточка 5

Вычислите:

- 1) $\frac{\cos^2 \alpha + 2}{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$;
- 2) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right)$, если $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 3) $\cos x$, если $\cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$;
- 4) $1 + \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$;
- 6) $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$;
- 7) $2 \sin 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,3$;
- 8) $\sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,7$;
- 9) $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + 4 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$;
- 10) $2\sqrt{3}(\sin \alpha - \sin \beta)$, если $\begin{cases} \alpha + \beta = 2\pi \\ \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$;
- 11) $5 \cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 12) $\cos x$, если $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0,5$;
- 13) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Карточка 6

Вычислите:

- 1) $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^4 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$;
- 2) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{ctg} x = 2$;
- 3) $\cos x$, если $\sin(120^\circ - x) + \sin(120^\circ + x) = -\sqrt{3}$;
- 4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$;
- 5) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -1$;
- 6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,7$;
- 7) $2 \sin 6\alpha \cdot \sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$;
- 8) $\cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,3$;
- 9) $\frac{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$;
- 10) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 11) $4 \sin(\alpha - \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{4}$ и $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{6}$;
- 12) $\sqrt{19} \operatorname{tg} x$, если $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,1}$;
- 13) $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Карточка 7

Вычислите:

- 1) $\frac{\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$;
- 2) $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$;
- 3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x - 45^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 4) $\cos 2\alpha$, если $\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0,25$;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$;
- 6) $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sqrt{0,3}$;
- 7) $2 \cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 8\alpha$, если $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 0,8$;
- 8) $\sin^2 \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,3$;
- 9) $\cos \left(\frac{4}{3}\pi + 2\alpha \right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 10) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$, если $\begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$;
- 11) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{5}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 12) $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 13) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Карточка 8

Вычислите:

- 1) $\frac{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{9 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$;
- 2) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$;
- 3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin x$;
- 4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$;
- 5) $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$;
- 6) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right)$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,5$;
- 7) $2 \cos 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \cos 12\alpha$, если $\cos \alpha = 0,2$;
- 8) $\sin^2 \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,1$;
- 9) $\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{11\pi}{6} - 2\alpha \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{3}$;
- 10) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$, если $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$;
- 11) $0,2 \cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = -\frac{1}{4}$ и $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$;
- 12) $\sin x$, если $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,44}$;
- 13) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Карточка 9

1. Вычислите:

1) $4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ);$

2) $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ;$

3) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5;$

4) $\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$, если $\alpha = 7^\circ;$

5) $\left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^{-1} \cdot \operatorname{arctg} 1;$

6) $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3).$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = |\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha|.$$

3. Решите уравнения:

1) $\cos^2(\pi x) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) = 2$, если $|x| \leq \frac{1}{2};$

2) $\cos(\pi x) + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$, если $2 \leq x \leq 6;$

3) $\operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x = 2$, если $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$

*Карточка 10***1. Вычислите:**

1) $\sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 340^\circ;$

2) $\frac{1 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos^{-4} \alpha;$

3) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right),$ если $\operatorname{tg} \alpha = 2;$

4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x,$ если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5;$

5) $\sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right);$

6) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right).$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$f(\alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

3. Решите уравнения:

1) $2 \cos(\pi x) + 3 \sin(\pi x) = 5,$ если $1 \leq x \leq 2;$

2) $\sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x),$ если $0 \leq x \leq 2;$

3) $x^2 + 6x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} + 9 = 0.$

Карточка 11**1. Вычислите:**

1) $\cos \frac{7\pi}{12};$

2) $\frac{\operatorname{tg} 7^{\circ} \cdot \sin 14^{\circ} - 1}{\cos 14^{\circ}};$

3) $\cos 47^{\circ} - \cos 13^{\circ} + \cos 73^{\circ};$

4) $\sin 20^{\circ} \cdot \sin 40^{\circ} \cdot \sin 80^{\circ};$

5) $162(\sin^4 x + \cos^4 x), \text{ если } \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3};$

6) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha;$

7) $\arccos(-0,5 \cdot \sqrt{3}) : \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right);$

8) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 3 \operatorname{arctg}(-2)\right).$

2. Найдите область изменения функции

$$f(\beta) = 2 \sin^2 \beta + 3 \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(\pi x) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) = 2, \text{ если } -6 \leq x \leq -2.$$

Карточка 12**1. Вычислите:**

1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12};$

2) $\cos \frac{6\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5};$

3) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ;$

4) $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7};$

5) $\cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3);$

6) $\operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13} \right).$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha.$$

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{ctg}(\pi x) = \sin^{-1}(\pi x) - \cos^{-1}(\pi x),$
если $-1 \leq x \leq 1,5;$

2) $\cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi x) \cdot \sin(3\pi x) = \frac{1}{4} \sin(2\pi x),$
если $0 \leq x \leq 0,5;$

3) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \cos \sqrt{1-x}.$

Карточка 13

1. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 1 - \sqrt{2}$;

2) $4 \cos 20^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ$.

2. Решите уравнения:

1) $1 + 2 \cos \frac{\pi x}{15} = 0$;

2) $2 \cos(x + 60^\circ) \cdot \cos 3x = \cos(x + 60^\circ)$;

3) $\frac{\sin x}{\cos 60^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} x$;

4) $\cos 4x = \sin 2x$, если $0 < x < 80^\circ$;

5) $\frac{\sin 4x}{\cos 5x} = -1$, если $80^\circ < x < 180^\circ$;

6) $\sin(30^\circ - x) \cdot \cos(60^\circ + x) = 1$;

7) $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x$;

8) $9 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin^2 x = 6$;

9) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

10) $\sqrt{3} \sin^2 x + 5 \cos^2 x - (5\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x = 0$;

11) $1 - \cos \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$.

3. Решите неравенство $\sqrt{10 - 18 \cos x} \geq 6 \cos x - 2$.4. Постройте график $y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \frac{\cos^2(-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x)}$.

Карточка 14

1. Докажите тождества:

$$1) \frac{(1 - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right);$$

$$2) \frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} = \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x}.$$

2. Решите уравнения:

$$1) 3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0;$$

$$2) \frac{\sin(x - 45^\circ)}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0;$$

$$3) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 4x;$$

$$4) \cos(x + 360^\circ) = \cos(2x - 270^\circ), \text{ если } 270^\circ < x < 360^\circ;$$

$$5) \sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3} \sin 2x;$$

$$6) \sin x \cdot \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x;$$

$$7) \sin \frac{x}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{6} + 1 = 0;$$

$$8) 2 \cos x \cdot \cos 4x = \cos 3x;$$

$$9) 2 \cos 4x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x);$$

$$10) \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8 \sin x};$$

$$11) \cos x + \sin x = \sqrt{1 - 2 \cos^2 x};$$

$$12) \cos 2x - \cos 3x = \sin 5x.$$

3. Решите неравенство $\sin 5x + \sin x \leq 0$.

Карточка 15

1. Вычислите:

1) $\cos(2\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ при $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}$.

2. Докажите тождества:

1)
$$\frac{\sin \alpha + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha};$$

2) $8 \operatorname{ctg} 24\alpha + 4 \operatorname{tg} 12\alpha + 2 \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

3. Решите уравнения:

1) $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = \operatorname{ctg} 5x$;

2) $\sin 6x = \cos 4x$ при $0 < x < 90^\circ$;

3) $\sin(x - 45^\circ) = \cos(3x - 180^\circ)$ при $0 < x < 180^\circ$;

4) $\cos 3x - \cos 7x = \sin 5x$;

5) $\cos(20^\circ + x) + \cos(100^\circ - x) = \frac{1}{2}$;

6) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

7) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$;

8) $\cos 3x + \cos 2x = \sin 5x$.

4. Решите неравенства:

1) $\sqrt{25 - 16 \operatorname{ctg} x} \geq 8 \operatorname{ctg} x - 5$;

2) $\cos x + \cos 5x \leq 0$.

5. Постройте график

$$y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cdot \sin(\pi + x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x)}.$$

Карточка 16

1. Найдите $2\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$

при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислите $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ$.

3. Докажите:

1)
$$\frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right);$$

2) $4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = 2,4,$
если $\cos 4\alpha = \frac{3}{5}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

4. Решите уравнения:

1) $\cos(170^\circ + x) - \cos(50^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, если $-180^\circ < x < 90^\circ$;

2) $\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0$;

3) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}$;

4) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$;

5) $3 + 2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

6) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$;

7) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{16} + \cos 2x$ при $0,5\pi \leq x \leq 1,5\pi$;

8) $\arcsin(\cos(2 \operatorname{arctg} x)) = 0$.

5. Решите неравенства:

1) $\arcsin x < \arccos x$;

2) $\arcsin \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} < \frac{\pi}{6}$.

6. Постройте график $y(x) = \frac{\cos x + \cos 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$.

Решение карточки 1

1. Разложите на множители:

$$1) \cos \frac{3\alpha}{8} - \cos \frac{7\alpha}{24} = -2 \sin \frac{\alpha}{24} \cdot \sin \frac{\alpha}{3}. \quad 7.2$$

$$\begin{aligned} 2) \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha - \sin 6\alpha \cdot \cos 3\alpha &= \\ &= -\cos 3\alpha \cdot (\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) = \\ &= -2 \cos 3\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha. \end{aligned} \quad 7.4$$

$$\begin{aligned} 3) \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha &= \\ &= 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2 \sin 4\alpha \cdot \left(\cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= -4 \sin 4\alpha \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned} \quad \begin{matrix} 7.3 \\ 7.2 \end{matrix}$$

2. Докажите тождества:

$$1) \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = -\cos 4\alpha \cdot \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = \\ &= 0,5(\sin 3\alpha + \sin \alpha) - 0,5(\sin 5\alpha + \sin \alpha) = \\ &= 0,5 \sin 3\alpha - 0,5 \sin 5\alpha + 0,5 \sin \alpha - 0,5 \sin \alpha = \\ &= 0,5(\sin 3\alpha - \sin 5\alpha) = -\cos 4\alpha \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad \begin{matrix} 7.9 \\ 7.4 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\cos 4\alpha \cdot \sin \alpha \\ \Pi &= -\cos 4\alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)} = \\ &= \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.6 \quad &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)} = -\frac{\sin^2 \alpha}{-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \\
 L &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\
 \Pi &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.
 \end{aligned}$$

3. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 7.7 \quad 1) \quad &\sin^2 16^\circ + \cos 46^\circ \cdot \cos 14^\circ + 1 = \\
 5.8 \quad &= \sin^2 16^\circ + 0,5(\cos 32^\circ + \cos 60^\circ) + 1 = \\
 &= 0,5(1 - \cos 32^\circ) + 0,5 \cos 32^\circ + \frac{1}{4} + 1 = \\
 &= 0,5 + 1,25 - 0,5 \cos 32^\circ + 0,5 \cos 32^\circ = \boxed{1,75}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.2 \quad 2) \quad &\frac{1 - 2 \cos^2 13^\circ}{\sin 64^\circ} = \\
 3.5 \quad &= -\frac{\cos 26^\circ}{\sin(90^\circ - 26^\circ)} = -\frac{\cos 26^\circ}{\cos 26^\circ} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.10 \quad 3) \quad &(\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 54^\circ) \sin 54^\circ + 1,5 = \\
 &= \left(\frac{1 + \cos 54^\circ}{\sin 54^\circ} - \frac{\cos 54^\circ}{\sin 54^\circ} \right) \sin 54^\circ + 1,5 = \\
 &= \left(\frac{1 + \cos 54^\circ - \cos 54^\circ}{\sin 54^\circ} \right) \sin 54^\circ + 1,5 = \\
 &= \frac{1}{\sin 54^\circ} \cdot \sin 54^\circ + 1,5 = 1 + 1,5 = \boxed{2,5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.11 \quad 4) \quad &\frac{\left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right)^2}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7} \right)} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7} \right)} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{\sin \frac{2\pi}{11} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} \right)}{10 \sin \left(\frac{\pi}{11} + \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11} + \frac{2\pi}{7} \right)} = & 3.5 \\
 & & 3.6 \\
 & = \frac{\sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{7}}{10 \sin \left(\frac{\pi}{11} + \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{11} - \frac{2\pi}{7} \right)} = & 7.9 \\
 & = \frac{\sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{7}}{5 \left(\sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{7} \right)} = \boxed{\frac{1}{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{1 - \sin^2 38^\circ}{2(\sin 14^\circ + \sin^2 38^\circ)} = & 5.8 \\
 & = \frac{\cos^2 38^\circ}{2(\sin(90^\circ - 76^\circ) + 0,5(1 - \cos 76^\circ))} = & 3.6 \\
 & = \frac{\cos^2 38^\circ}{2(\cos 76^\circ + 0,5 - 0,5 \cos 76^\circ)} = \\
 & = \frac{\cos^2 38^\circ}{2(0,5 + 0,5 \cos 76^\circ)} = \frac{\cos^2 38^\circ}{2 \cos^2 38^\circ} = \boxed{0,5}. & 5.7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{\cos 31^\circ + \cos 89^\circ + 1}{-\cos^2 14^\circ 30'} = & 7.1 \\
 & & 5.7 \\
 & = \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 29^\circ + 1}{-0,5(1 + \cos 29^\circ)} = \frac{\cos 29^\circ + 1}{-0,5(1 + \cos 29^\circ)} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{-3 + 2 \sin^2 78^\circ + 2 \sin^2 18^\circ}{5 \sin^2 42^\circ} = & 5.8 \\
 & = \frac{-3 + 1 - \cos 156^\circ + 1 - \cos 36^\circ}{5 \cdot 0,5(1 - \cos 84^\circ)} = \\
 & = \frac{-1 - (\cos 156^\circ + \cos 36^\circ)}{2,5(1 - \cos 84^\circ)} = & 7.1 \\
 & = -\frac{1 + 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 96^\circ}{2,5(1 - \cos(90^\circ - 6^\circ))} = -\frac{1 + \cos(90^\circ + 6^\circ)}{2,5(1 - \sin 6^\circ)} = & 3.5 \\
 & & 3.6 \\
 & = -\frac{1 - \sin 6^\circ}{2,5(1 - \sin 6^\circ)} = \boxed{-0,4}.
 \end{aligned}$$

$$9) \frac{\sin 44^\circ + \cos 74^\circ}{2 \cos 14^\circ + 2 \sin 104^\circ} =$$

3.5

3.3

$$= \frac{\sin(90^\circ - 46^\circ) + \cos 74^\circ}{2 \cos 14^\circ + 2 \sin(90^\circ + 14^\circ)} =$$

7.1

$$= \frac{\cos 46^\circ + \cos 74^\circ}{2 \cos 14^\circ + 2 \cos 14^\circ} = \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 14^\circ}{4 \cos 14^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 14^\circ}{4 \cos 14^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$10) \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos 62^\circ + \cos 42^\circ}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

3.5

$$= \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \cos(90^\circ - 28^\circ) + \cos(90^\circ - 48^\circ)}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

7.3

$$= \frac{\sin 36^\circ + \sin 40^\circ + \sin 28^\circ + \sin 48^\circ}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 38^\circ \cdot \cos 2^\circ + 2 \sin 38^\circ \cdot \cos 10^\circ}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} =$$

7.1

$$= \frac{2 \sin 38^\circ \cdot (\cos 2^\circ + \cos 10^\circ)}{4 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \sin 38^\circ} = \frac{2 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ}{2 \cos 6^\circ \cdot \cos 4^\circ} = \boxed{1}.$$

7.3

$$11) \frac{\cos 37^\circ - 8 \cos 143^\circ + 2 \sin 127^\circ}{\sin 42^\circ \cdot \sin 79^\circ + \sin 48^\circ \cdot \sin 11^\circ} =$$

3.17

3.3

$$= \frac{\cos 37^\circ - 8 \cos(180^\circ - 37^\circ) + 2 \sin(90^\circ + 37^\circ)}{0,5(\cos 37^\circ - \cos 121^\circ) + 0,5(\cos 37^\circ - \cos 59^\circ)} =$$

$$= \frac{\cos 37^\circ + 8 \cos 37^\circ + 2 \cos 37^\circ}{0,5 \cos 37^\circ - 0,5 \cos 121^\circ + 0,5 \cos 37^\circ - 0,5 \cos 59^\circ} =$$

3.17

$$= \frac{11 \cos 37^\circ}{0,5(2 \cos 37^\circ - \cos(180^\circ - 59^\circ) - \cos 59^\circ)} =$$

$$= \frac{11 \cos 37^\circ}{0,5(2 \cos 37^\circ + \cos 59^\circ - \cos 59^\circ)} = \frac{11 \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = \boxed{11}.$$

Решение карточки 2

1. Разложите на множители:

$$1) \cos \frac{5\alpha}{6} + \cos \frac{4\alpha}{15} = 2 \cos \frac{11\alpha}{20} \cdot \cos \frac{17\alpha}{60}. \quad (7.1)$$

$$2) \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 8\alpha = \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 8\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 6\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 8\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 6\alpha + \sin 8\alpha) = \sin 7\alpha \cdot \cos \alpha. \quad (7.3)$$

$$3) 1 - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \quad (5.1)$$

$$= 1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \quad (5.2)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) = \quad (7.11)$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha).$$

2. Докажите тождества:

$$1) \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 6\alpha.$$

$$L = \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \quad (7.9)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 6\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 6\alpha.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{2} \sin 6\alpha \\ \Pi = \frac{1}{2} \sin 6\alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

5.1

5.2

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - 1 + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \\ \Pi &= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

3. Вычислите:

7.8

$$\begin{aligned} 1) \sin 67^\circ \cdot \sin 7^\circ - \sin^2 37^\circ - 2 &= \\ &= 0,5(\cos 60^\circ - \cos 74^\circ) - \sin^2 37^\circ - 2 = \\ &= 0,25 - 0,5 \cos 74^\circ - 0,5(1 - \cos 74^\circ) - 2 = \\ &= 0,25 - 0,5 \cos 74^\circ - 0,5 + 0,5 \cos 74^\circ - 2 = \\ &= -0,25 - 2 = \boxed{-2,25}. \end{aligned}$$

5.2

$$2) \frac{1 - 2 \sin^2 46^\circ}{8 \cos 92^\circ} = \frac{\cos 92^\circ}{8 \cos 92^\circ} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{ctg} 31^\circ} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} &= \\ &= \frac{\frac{\cos 31^\circ}{\sin 31^\circ} - \frac{\sin 31^\circ}{\cos 31^\circ}}{\frac{\sin 31^\circ}{\cos 31^\circ} + \frac{\cos 31^\circ}{\sin 31^\circ}} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{\sin 31^\circ \cdot \cos 31^\circ}}{\frac{\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ}{\sin 31^\circ \cdot \cos 31^\circ}} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} = \\ &= \frac{\cos^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{\sin^2 31^\circ + \cos^2 31^\circ} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} = \cos 62^\circ \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} = \boxed{3}. \end{aligned}$$

5.2

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}\right)^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5}} &= \frac{\left(\frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}} - \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}}\right)^2}{\left(\frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}\right)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{10} - \cos^2 \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}}\right)^2}{\left(\frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}\right)^2} = \left(-\frac{\cos \frac{\pi}{5}}{0,5 \sin \frac{\pi}{5}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}}\right)^2 = \boxed{4}.
 \end{aligned}$$

5.1

5.2

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{\cos \frac{2\pi}{13} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{13}\right)}{\sin \frac{\pi}{26} \cdot \sin \frac{3\pi}{26}} &= \\
 &= \frac{\cos \frac{2\pi}{13} - \cos \frac{\pi}{13}}{\sin \frac{\pi}{26} \cdot \sin \frac{3\pi}{26}} = -\frac{2 \sin \frac{3\pi}{26} \cdot \sin \frac{\pi}{26}}{\sin \frac{\pi}{26} \cdot \sin \frac{3\pi}{26}} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

3.5

7.2

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{1 + \cos 62^\circ - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 &= \\
 &= \frac{1 + 2 \cos^2 31^\circ - 1 - \cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 = \frac{\cos^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - 1 = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

5.2

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{2 \cos^2 42^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ} &= \\
 &= \frac{1 + \cos 84^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 168^\circ} = \frac{1 + 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 24^\circ}{\cos^2 (180^\circ - 12^\circ)} = \\
 &= \frac{1 + \cos 24^\circ}{\cos^2 12^\circ} = \frac{1 + \cos 24^\circ}{0,5(1 + \cos 24^\circ)} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

5.7

7.1

3.17

5.7

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{2 \cos^2 46^\circ + 2 \cos^2 106^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ} &= \\
 &= \frac{1 + \cos 92^\circ + 1 + \cos 212^\circ - 3}{\sin^2 76^\circ} = \\
 &= \frac{-1 + 2 \cos 152^\circ \cdot \cos 60^\circ}{0,5(1 - \cos 152^\circ)} = 2 \frac{\cos 152^\circ - 1}{1 - \cos 152^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

5.7

5.8

7.1

$$\begin{aligned}
 & 9) \frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \sin 44^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin 45^\circ \cdot \cos 46^\circ}{9\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \sin(90^\circ - 46^\circ)} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \cos 46^\circ}{9\sqrt{2} \cos 46^\circ + \sqrt{2} \cos 46^\circ} = \frac{\cos 46^\circ}{10 \cos 46^\circ} = \boxed{\frac{1}{10}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 10) \frac{\sin 8^\circ - \sin 10^\circ - \sin 12^\circ + \sin 14^\circ}{4 \sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin 11^\circ \cdot \cos 3^\circ - 2 \sin 11^\circ \cdot \cos 1^\circ}{4 \sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} = \\
 & = \frac{2 \sin 11^\circ (\cos 3^\circ - \cos 1^\circ)}{4 \sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 11^\circ} = \\
 & = -\frac{2 \sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ}{2 \sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = -\frac{2 \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 11) \frac{5 \sin 211^\circ + 8 \cos 59^\circ - 5 \sin 31^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 67^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} = \\
 & = \frac{5 \sin(270^\circ - 59^\circ) + 8 \cos 59^\circ - 5 \sin(90^\circ - 59^\circ)}{\sin(90^\circ - 36^\circ) \cdot \sin(90^\circ - 23^\circ) - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} = \\
 & = \frac{-5 \cos 59^\circ + 8 \cos 59^\circ - 5 \cos 59^\circ}{\cos 36^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 36^\circ \cdot \sin 23^\circ} = -\frac{2 \cos 59^\circ}{\cos 59^\circ} = \boxed{-2}.
 \end{aligned}$$

Решение карточки 3

1. Разложите на множители:

$$1) \sin 2\alpha - \sin(3\alpha + \pi) = \quad 3.15$$

$$= \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \quad 7.3$$

$$2) \sin 2\alpha - 2 \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha + \sin 6\alpha = \quad 7.3$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 4\alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= 2 \sin 4\alpha (\cos 2\alpha - \cos \alpha) = -4 \sin 4\alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad 7.2 \end{aligned}$$

$$3) \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha - \cos 6\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha = \quad 7.2$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin 2\alpha (1 + \sin 4\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin 4\alpha \right) = \quad 7.3 \\ &= 4 \sin 2\alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right). \end{aligned}$$

2. Докажите тождества:

$$1) (\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \cos 3\alpha) = 2 \sin \alpha. \quad 7.5$$

$$\begin{aligned} L &= (\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \cos 3\alpha) = \quad 7.5 \\ &= \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} \cdot 2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin \alpha. \quad 7.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 2 \sin \alpha \\ \Pi &= 2 \sin \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \quad 3.7 \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \quad 7.1 \\ &= \frac{2 \cos \alpha \cdot (\cos \alpha + \cos 2\alpha)}{2 \sin \alpha \cdot (\cos \alpha + \cos 2\alpha)} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Вычислите:

7.7

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \cos^2 41^\circ + \cos 79^\circ \cdot \cos 19^\circ - 1 = \\
 & = \cos^2 41^\circ + 0,5(\cos 60^\circ + \cos 98^\circ) - 1 = \\
 & = 0,5(1 + \cos 82^\circ) + 0,25 + 0,5 \cos 98^\circ - 1 = \\
 & = 0,5 \cos(90^\circ - 8^\circ) + 0,5 \cos(90^\circ + 8^\circ) - 0,25 = \\
 & = 0,5(\sin 8^\circ - \sin 8^\circ) - 0,25 = \boxed{-0,25}.
 \end{aligned}$$

5.7

3.1

3.5

3.6

7.1

3.3

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{\sqrt{2}(\cos 80^\circ + \sin 80^\circ)}{\sin 125^\circ} = \\
 & = \sqrt{2} \cdot \frac{\cos 80^\circ + \sin(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 125^\circ} = \\
 & = \sqrt{2} \cdot \frac{\cos 80^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 125^\circ} = \\
 & = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\cos 45^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin(90^\circ + 35^\circ)} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \boxed{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4 \operatorname{tg}^2 31^\circ \cdot \sin^2 31^\circ} = \\
 & = \frac{\frac{\sin^2 31^\circ}{\cos^2 31^\circ} - \sin^2 31^\circ}{4 \cdot \frac{\sin^4 31^\circ}{\cos^2 31^\circ}} = \frac{\sin^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ \cdot \cos^2 31^\circ}{4 \sin^4 31^\circ} = \\
 & = \frac{\sin^2 31^\circ \cdot (1 - \cos^2 31^\circ)}{4 \sin^4 31^\circ} = \frac{\sin^2 31^\circ}{4 \sin^2 31^\circ} = \boxed{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{\sin^4 \frac{\pi}{9} - \cos^4 \frac{\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9}} = \\
 & = \frac{\left(\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9}\right) \left(\sin^2 \frac{\pi}{9} - \cos^2 \frac{\pi}{9}\right)}{2 \cos \frac{2\pi}{9}} = \\
 & = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{9} - \cos^2 \frac{\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9}} = -\frac{\cos \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

5.2

$$5) \frac{\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3}}{4 \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}} = -2 \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}}{4 \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}} = \boxed{-\frac{1}{2}}. \quad 7.4$$

$$6) \frac{\operatorname{tg} 34^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4 \operatorname{tg} 17^\circ} = \frac{2 \operatorname{tg} 17^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{(1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ) 4 \operatorname{tg} 17^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}. \quad 5.3$$

$$7) \frac{\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - 2 \sin 65^\circ}{\cos 25^\circ} = \quad 7.1$$

$$= \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ - 2 \sin(90^\circ - 25^\circ)}{\cos 25^\circ} = \quad 3.6$$

$$= \frac{2 \cos 25^\circ \cdot (\cos 60^\circ - 1)}{\cos 25^\circ} = \boxed{-1}.$$

$$8) \cos^2 23^\circ - \cos^2 7^\circ + \sin^2 53^\circ - 3 = \quad 5.7$$

$$= 0,5(1 + \cos 46^\circ) - 0,5(1 + \cos 14^\circ) + 0,5(1 - \cos 106^\circ) - 3 = \quad 5.8$$

$$= 0,5(\cos 46^\circ - \cos 14^\circ) - 0,5 \cos(90^\circ + 16^\circ) + 0,5 - 3 = \quad 7.2$$

$$= -\sin 30^\circ \cdot \sin 16^\circ + 0,5 \sin 16^\circ - 2,5 = \quad 3.1$$

$$= -0,5 \sin 16^\circ + 0,5 \sin 16^\circ - 2,5 = \boxed{-2,5}.$$

$$9) \frac{2\sqrt{2} \cos 7^\circ + \sqrt{2} \sin 83^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ} = \quad 7.1$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \cos 7^\circ + \sqrt{2} \sin(90^\circ - 7^\circ)}{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 7^\circ} = \frac{2 \cos 7^\circ + \cos 7^\circ}{\cos 7^\circ} = \boxed{3}. \quad 3.6$$

$$10) \frac{\cos 4^\circ - \cos 6^\circ - \cos 8^\circ + \cos 10^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ} = \quad 7.1$$

$$= \frac{2 \cos 7^\circ \cdot \cos 3^\circ - 2 \cos 7^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 7^\circ (\cos 3^\circ - \cos 1^\circ)}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 7^\circ} = \quad 7.2$$

$$= \frac{2 \cdot (-2) \sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} =$$

$$= -\frac{4 \cdot 2 \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 1^\circ}{\sin^2 1^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \boxed{-8}. \quad 5.1$$

$$\begin{aligned}
 & 11) \frac{3 \cos 215^\circ - 4 \cos 35^\circ - 2 \sin 125^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ} = \\
 & \quad \cdot \frac{3 \cos(180^\circ + 35^\circ) - 4 \cos 35^\circ - 2 \sin(90^\circ + 35^\circ)}{0,5(\cos 35^\circ + \cos 1^\circ) - 0,5(\cos 145^\circ + \cos 1^\circ)} = \\
 & \quad \quad \quad \frac{-3 \cos 35^\circ - 4 \cos 35^\circ - 2 \cos 35^\circ}{0,5 \cos 35^\circ + 0,5 \cos 1^\circ - 0,5 \cos 145^\circ - 0,5 \cos 1^\circ} = \\
 & \quad \quad \quad \frac{-9 \cos 35^\circ}{0,5 \cos 35^\circ - 0,5 \cos(180^\circ - 35^\circ)} = \\
 & \quad \quad \quad \frac{-9 \cos 35^\circ}{0,5(\cos 35^\circ + \cos 35^\circ)} = \boxed{-9}.
 \end{aligned}$$

Примечание. Можно проще, если учесть, что

$$\begin{cases} \cos 73^\circ = \sin 17^\circ \\ \cos 72^\circ = \sin 18^\circ \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 72^\circ = \\
 & = \cos 17^\circ \cdot \cos 18^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 18^\circ = \\
 & = \cos(17^\circ + 18^\circ) = \cos 35^\circ.
 \end{aligned}$$

Решение карточки 4

1. Упростите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$

5.9

$$= \frac{1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1 - \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} =$$

3.5

$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)} + \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} =$$

3.6

3.1

3.3

$$= \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \sin 2\alpha + 1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha}.$$

2. Разложите на множители:

1) $\cos 4\alpha + 2 \cos \alpha \cdot \cos 6\alpha + \cos 8\alpha =$

7.1

$$= 2 \cos \alpha \cdot \cos 6\alpha + 2 \cos 6\alpha \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \cos 6\alpha \cdot (\cos \alpha + \cos 2\alpha) = 4 \cos 6\alpha \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

2) $2 \sin 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha =$

7.2

$$= 2 \sin 3\alpha - 2 \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha = 2 \sin 3\alpha (1 - \sin \alpha) =$$

$$= 2 \sin 3\alpha \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \alpha\right) =$$

7.4

$$= 4 \sin 3\alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

3. Докажите тождества:

1) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$

$$L = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

5.1

5.7

5.8

$$= \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \\ \Pi = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} = \sin 4\alpha.$$

5.9

3.30

3.29

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)} = 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)}} = \\ &= 1 + \frac{\cos 4\alpha}{\frac{-\cos 4\alpha}{1 - \sin 4\alpha}} = 1 - \frac{\cos 4\alpha(1 - \sin 4\alpha)}{\cos 4\alpha} = \\ &= 1 - 1 + \sin 4\alpha = \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \sin 4\alpha \\ \Pi = \sin 4\alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

4. Вычислите:

5.7

7.7

3.17

$$\begin{aligned} 1) \cos^2 84^\circ + \cos 51^\circ \cdot \cos 39^\circ + 3 &= \\ &= 0,5(1 + \cos 168^\circ) + 0,5(\cos 90^\circ + \cos 12^\circ) + 3 = \\ &= 0,5 + 0,5 \cos(180^\circ - 12^\circ) + 0,5 \cos 12^\circ + 3 = \\ &= 3,5 - 0,5 \cos 12^\circ + 0,5 \cos 12^\circ = \boxed{3,5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} \cdot 2 \cos^2 75^\circ &= \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 75^\circ}{\cos^2 75^\circ}\right) \cdot 2 \cos^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} = \end{aligned}$$

5.2

$$= \frac{2 \cos^2 75^\circ - 2 \sin^2 75^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{2 \cos 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \boxed{2}.$$

- 3) $\frac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ}{2 \operatorname{ctg}^2 34^\circ \cdot \cos^2 34^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ \cdot \sin^2 34^\circ}{\sin^2 34^\circ}}{2 \frac{\cos^4 34^\circ}{\sin^2 34^\circ}} =$
 $= \frac{\cos^2 34^\circ (1 - \sin^2 34^\circ)}{\sin^2 34^\circ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 34^\circ}{\cos^4 34^\circ} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sin^2 34^\circ}{\cos^2 34^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 34^\circ}{\cos^2 34^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.$
- 4) $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{11} + \sin \frac{\pi}{11}\right)^2}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{11}\right)} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{11} + \sin^2 \frac{\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{\pi}{11}}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{11}\right)} = \frac{5.7}{5.1}$
 $= \frac{1 + \sin \frac{2\pi}{11}}{0,5 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}\right)\right)} = 2 \frac{1 + \sin \frac{2\pi}{11}}{1 + \sin \frac{2\pi}{11}} = \boxed{2}. \quad \frac{3.5}{}$
- 5) $\frac{\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{24}} = \frac{2 \cos \frac{3\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}}{\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{24}} = \boxed{2}. \quad \frac{7.1}{}$
- 6) $\frac{1 + \sin 18^\circ - \cos^2 36^\circ}{2 \cos^2 36^\circ} + \frac{1}{4} = \frac{5.7}{}$
 $= \frac{1 + \sin(90^\circ - 72^\circ) - 0,5(1 + \cos 72^\circ)}{1 + \cos 72^\circ} + \frac{1}{4} = \frac{3.6}{}$
 $= \frac{1 + \cos 72^\circ - 0,5 - 0,5 \cos 72^\circ}{1 + \cos 72^\circ} + \frac{1}{4} =$
 $= 0,5 \cdot \frac{1 + \cos 72^\circ}{1 + \cos 72^\circ} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$
- 7) $\frac{\cos 68^\circ - 2 \cos^2 4^\circ}{2 \cos^2 26^\circ} = \frac{5.7}{}$
 $= \frac{\cos 68^\circ - 1 - \cos 8^\circ}{2 \cos^2 26^\circ} = \frac{-2 \sin 38^\circ \cdot \sin 30^\circ - 1}{1 + \cos 52^\circ} = \frac{7.2}{}$
 $= -\frac{\sin(90^\circ - 52^\circ) + 1}{1 + \cos 52^\circ} = -\frac{\cos 52^\circ + 1}{1 + \cos 52^\circ} = \boxed{-1}. \quad \frac{3.6}{}$

5.7

$$8) \cos^2 19^\circ + \sin^2 11^\circ + \cos^2 41^\circ + 2 =$$

5.8

$$= 0,5(1 + \cos 38^\circ + 1 - \cos 22^\circ + 1 + \cos 82^\circ) + 2 =$$

7.2

$$= 0,5(3 - 2 \sin 30^\circ \cdot \sin 8^\circ + \cos(90^\circ - 8^\circ)) + 2 =$$

3.5

$$= 3,5 + 0,5(\sin 8^\circ - \sin 8^\circ) = \boxed{3,5}.$$

3.15

3.29

$$9) \frac{8 \sin 194^\circ + \cos 256^\circ}{\sin 14^\circ} = \frac{8 \sin(180^\circ + 14^\circ) + \cos(270^\circ - 14^\circ)}{\sin 14^\circ} =$$

$$= \frac{-8 \sin 14^\circ - \sin 14^\circ}{\sin 14^\circ} = \boxed{-9}.$$

7.2

$$10) \frac{2\sqrt{2} \sin 22^\circ + 5\sqrt{2} \cos 68^\circ}{\cos 23^\circ - \cos 67^\circ} =$$

3.5

$$= \frac{\sqrt{2}(2 \sin 22^\circ + 5 \cos(90^\circ - 22^\circ))}{2 \sin 45^\circ \cdot \sin 22^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2 \sin 22^\circ + 5 \sin 22^\circ)}{\sqrt{2} \sin 22^\circ} = \frac{7 \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = \boxed{7}.$$

7.1

7.3

7.9

$$11) \frac{\cos 5^\circ + \cos 85^\circ + \sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{4\sqrt{2} \cos 5^\circ \cdot \sin 55^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 45^\circ \cdot \cos 40^\circ + 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{4\sqrt{2}(0,5(\sin 60^\circ + \sin 50^\circ))} =$$

3.5

$$= \frac{\sqrt{2} \cos 40^\circ + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{2} \left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{\cos(90^\circ - 50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \left(\sin 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

7.7

3.17

3.6

7.1

$$12) \frac{7 \cos 29^\circ - 2 \cos 151^\circ + 4 \sin 61^\circ}{\cos 67^\circ \cdot \cos 38^\circ + \cos 23^\circ \cdot \cos 52^\circ} =$$

$$= \frac{7 \cos 29^\circ - 2 \cos(180^\circ - 29^\circ) + 4 \sin(90^\circ - 29^\circ)}{0,5(\cos 29^\circ + \cos 105^\circ) + 0,5(\cos 29^\circ + \cos 75^\circ)} =$$

$$= \frac{7 \cos 29^\circ + 2 \cos 29^\circ + 4 \cos 29^\circ}{0,5(\cos 29^\circ + \cos 105^\circ + \cos 29^\circ + \cos 75^\circ)} =$$

$$= \frac{13 \cos 29^\circ}{0,5(2 \cos 29^\circ + 2 \cos 90^\circ \cdot \cos 15^\circ)} = \frac{13 \cos 29^\circ}{\cos 29^\circ} = \boxed{13}.$$

Решение карточки 5

Вычислите:

$$1) \frac{\cos^2 \alpha + 2}{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 3.$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha + 2}{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha \left(1 + \frac{2}{\cos^2 \alpha}\right)}{\cos^2 \alpha (3 \operatorname{tg} \alpha + 1)} = \\ &= \frac{1 + 2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{3 \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3 \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{3 + 18}{9 + 1} = \boxed{2,1}. \end{aligned}$$

1.5

$$2) \cos \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3}\right), \text{ если } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \cos \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \\ &= 2 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

7.2

$$3) \cos x, \text{ если } \cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2}.$$

$$\cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2};$$

$$2 \cos x \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}; \quad \cos x = 1.$$

$$4) 1 + \cos 2\alpha, \text{ если } \sin \alpha = -0,6.$$

$$1 + \cos 2\alpha = 1 + 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 - 2 \cdot 0,36 = \boxed{1,28}.$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = 3; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 9} = \boxed{-0,75}.$$

$$6) \cos(2\alpha - \pi), \text{ если } \sin \alpha = \sqrt{0,2}.$$

$$\cos(2\alpha - \pi) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha =$$

$$= -(1 - 2 \sin^2 \alpha) = -(1 - 2 \cdot 0,2) = \boxed{-0,6}.$$

7) $2 \sin 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,3$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0,3;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,09;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,09; \quad \sin 2\alpha = -0,91;$$

7.9 $2 \sin 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \sin 12\alpha = \sin 12\alpha - \sin 2\alpha - \sin 12\alpha =$
 $= -\sin 2\alpha = \boxed{0,91}.$

8) $\sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = 0,7$.

8.8
 8.29 $\sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \right) =$
 $= \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha) = 0,5 \cdot 1,7 = \boxed{0,85}.$

9) $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + 4 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

5.5
 $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + 4 \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + 2 \cos \alpha) : \cos \alpha}{(\sin \alpha + 4 \cos \alpha) : \cos \alpha} =$
 $= \frac{\operatorname{tg} \alpha + 2}{\operatorname{tg} \alpha + 4} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 2}{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 4} = \frac{\frac{2 \cdot 0,5}{1 - 0,25} + 2}{\frac{2 \cdot 0,5}{1 - 0,25} + 4} =$
 $= \frac{\frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{4 + 6}{4 + 12} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}.$

10) $2\sqrt{3}(\sin \alpha - \sin \beta)$, если $\begin{cases} \alpha + \beta = 2\pi \\ \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$.

7.4 $2\sqrt{3}(\sin \alpha - \sin \beta) = 2\sqrt{3} \cdot 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$
 $= 4\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \pi = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) = \boxed{-6}.$

11) $5 \cos(\alpha - \beta)$, если $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$ и $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} 5 \cos(\alpha - \beta) &= 5(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= 5 \left(\frac{1}{2} + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta \right) = \\ &= 5 \left(\frac{1}{2} - (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 5(1 - \cos(\alpha + \beta)) = 5 \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) = 5 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \boxed{2,5}. \end{aligned}$$

12) $\cos x$, если $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0,5$.

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0,5;$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,25;$$

$$1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,25; \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = -0,75; \quad \sin x = -0,75;$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}; \quad \cos x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \boxed{\pm \frac{\sqrt{7}}{4}}.$$

13) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1,5; \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,25;$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) =$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{3}{16} = \boxed{\frac{13}{16}}.$$

Решение карточки 6

Вычислите:

1) $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^4 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^4 \alpha} &= \frac{(\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) : \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha : \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} = (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ &= (4 - 6)(1 + 4) = \boxed{-10}. \end{aligned}$$

2) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{ctg} x = 2$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} \right) \right]} = \\ &= \frac{2 \sin 2x}{\cos \frac{\pi}{2} - \cos 2x} = -2 \operatorname{tg} 2x = -2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= -2 \cdot \frac{2 \cdot 0,5}{1 - 0,25} = \boxed{-2\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

3) $\cos x$, если $\sin(120^\circ - x) + \sin(120^\circ + x) = -\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \sin(120^\circ - x) + \sin(120^\circ + x) &= -\sqrt{3}; \\ 2 \sin 120^\circ \cdot \cos x &= -\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}; \quad \cos x = \boxed{-1}. \end{aligned}$$

4) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot (-0,5)}{1 + 0,25} = -\frac{4}{5} = \boxed{-0,8}.$$

5) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -1$.

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -1; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \boxed{0}. \quad 5.4$$

6) $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,7$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0,7; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,49;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,49; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,51;$$

$$\sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \boxed{0,51}. \quad 5.1$$

7) $2 \sin 6\alpha \cdot \sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$.

$$2 \sin 6\alpha \cdot \sin 4\alpha + \cos 10\alpha = (\cos 2\alpha - \cos 10\alpha) + \cos 10\alpha = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \boxed{-0,82}. \quad 7.8$$

8) $\cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,3$.

$$\cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{5\pi}{2} + \alpha \right) \right) = \quad 5.2$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = \quad 3.1$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \sin \alpha) = 0,5(1 + 0,3) = \boxed{0,65}.$$

9) $\frac{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$;

$$\frac{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - 4 \cos \alpha) : \cos \alpha}{(2 \sin \alpha + \cos \alpha) : \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha - 4}{2 \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 4}{\frac{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 1} = \frac{\frac{4}{1-4} - 4}{\frac{8}{1-4} + 1} = \frac{16}{5} = \boxed{3,2}. \quad 5.5$$

$$10) \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}, \text{ если } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} \text{ и } \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}.$$

7.3

7.2

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} &= -\frac{2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} = \\ &= -\frac{\sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6}} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \boxed{-\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$11) 4 \sin(\alpha - \beta), \text{ если } \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{4} \text{ и } \alpha + \beta = -\frac{\pi}{6}.$$

7.9

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] = \frac{1}{4};$$

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 1, \text{ значит } 4 \sin(\alpha - \beta) = \boxed{4}.$$

$$12) \sqrt{19} \operatorname{tg} x, \text{ если } \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,1}.$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,1;$$

5.1

$$1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,1;$$

$$-\sin x = -0,9; \quad \sin x = 0,9;$$

$$\sqrt{19} \operatorname{tg} x = \sqrt{19} \frac{\sin x}{\cos x} = \pm \sqrt{19} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} =$$

$$= \pm \sqrt{19} \frac{0,9}{\sqrt{1 - 0,81}} = \pm \sqrt{19} \frac{0,9}{\sqrt{0,19}} = \pm \sqrt{19} \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{19}{100}}} =$$

$$= \pm \sqrt{19} \cdot 0,9 \cdot \sqrt{\frac{100}{19}} = \pm 10 \cdot 0,9 = \boxed{\pm 9}.$$

$$13) \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha}, \text{ если } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}; \quad 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,8;$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -0,2; \quad \sin 2\alpha = -0,2;$$

5.1

$$\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

5.2

5.1

$$= \frac{(\cos 2\alpha)^2 + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1 - (-0,2)^2 + (-0,1)^2}{(-0,1)^2} = \frac{1 - 0,04 + 0,01}{0,01} = \frac{1 - 0,03}{0,01} =$$

$$= \frac{0,97}{0,01} = \boxed{97}.$$

Решение карточки 7

Вычислите:

1) $\frac{\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3} &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{5 \operatorname{tg} \alpha + \frac{3}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{5 \operatorname{tg} \alpha + 3 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - 4}{-5 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 4} = \boxed{-\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

2) $\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} - \frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} - \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} x + 1)^2 - (\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{4 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \\ &= \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{2}{-\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3} = \boxed{-2\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

3) $\operatorname{ctg} x$, если $\cos(x - 45^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$.

$$\cos(x - 45^\circ) - \cos(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x;$$

$$2 \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x; \quad 2 \sin x = \cos x; \quad \operatorname{ctg} x = \boxed{2}.$$

4) $\cos 2\alpha$, если $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0,25$.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 0,25;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = 0,25\sqrt{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8};$$

$$1 - \sin\alpha = \frac{1}{8}; \quad \sin\alpha = \frac{7}{8};$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 1\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{49}{64} = \boxed{-\frac{17}{32}}.$$

5) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot (-3)}{1 - 9} = \frac{-6}{-8} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

6) $\cos(2\alpha - \pi)$, если $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{0,3}$.

а) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha = -\sqrt{0,3}; \quad \sin\alpha = -\sqrt{0,3};$

б) $\cos(2\alpha - \pi) = -\cos 2\alpha = -(1 - 2\sin^2\alpha) = 2 \cdot (\sqrt{0,3})^2 - 1 = 0,6 - 1 = \boxed{-0,4}.$

7) $2\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 8\alpha$, если $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 0,8$.

а) $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 0,8; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \alpha = 0,64;$

$$\sin\alpha = -0,36 = -\frac{9}{25}.$$

б) $2\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 8\alpha = 2\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos(3\alpha + 5\alpha) =$
 $= 2\cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 5\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sin 5\alpha =$
 $= \cos 3\alpha \cdot \cos 5\alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos 5\alpha = \cos(5\alpha - 3\alpha) = \cos 2\alpha =$
 $= 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 - \frac{162}{625} = \frac{635 - 162}{625} = \boxed{\frac{463}{625}}.$

8) $\sin^2 \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2} \right)$, если $\sin \alpha = -0,3$.

$$\begin{aligned}\sin^2 \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{3}{2}\pi + \alpha \right) \right) = \frac{1}{2} (1 - \sin \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 0,3) = \frac{13}{20} = \boxed{0,65}.\end{aligned}$$

9) $\cos \left(\frac{4}{3}\pi + 2\alpha \right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{4}{3}\pi + 2\alpha \right) &= \cos \frac{4}{3}\pi \cdot \cos 2\alpha - \sin \frac{4}{3}\pi \cdot \sin 2\alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{2 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \right)^2 \right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{4}{3} - 4}{2 \left(1 + \frac{4}{3} \right)} = \boxed{-\frac{13}{14}}.\end{aligned}$$

10) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$, если $\begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} &= \frac{-2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \\ &= -\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}.\end{aligned}$$

11) $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{5}$ и $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \frac{1}{5} + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \\ &= \cos(\alpha - \beta) - \frac{2}{5} = \cos \frac{\pi}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \boxed{0,1}.\end{aligned}$$

12) $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\pm \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \pi k \right)$$

а) $-\sqrt{2} \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \pi k \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \pi k \right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $-\sqrt{2} \cos \left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \pi k \right) = -\sqrt{2} \cos \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k \right) =$
 $= \pm \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$

13) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4};$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4}; \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{4}; \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{8};$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)}{-\frac{1}{8}} = \boxed{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}.$$

Решение карточки 8

Вычислите:

$$1) \frac{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{9 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -3.$$

$$\begin{aligned} 1.5 \quad \frac{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{9 + 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} &= \left(\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\frac{9}{\cos^2 \alpha} + 5 \operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{9 \operatorname{tg}^2 \alpha + 9 + 5 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-9 - 9}{81 + 9 - 15} = \boxed{-0,24}. \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ если } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 4.5 \quad 4.6 \quad \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} + \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{-0,5 + 1}{1 + 0,5} + \frac{-0,5 - 1}{1 - 0,5} = \frac{0,5}{1,5} - \frac{1,5}{0,5} = \frac{1}{3} - 3 = \boxed{-2\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

$$3) \operatorname{ctg} x, \text{ если } \cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin x.$$

$$\begin{aligned} 7.1 \quad \cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ) &= \sqrt{2} \sin x; \\ 2 \cos x \cdot \cos 45^\circ &= \sqrt{2} \sin x; \\ \sin x &= \cos x; \quad \operatorname{ctg} x = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$4) \sin 2\alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{3}{4}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \frac{9}{16}} = \boxed{\frac{24}{25}}.$$

$$5) \sin \alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = 3; \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{6}{10} = \boxed{0,6}.$$

6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,5$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,25; \quad 1 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,25;$$

$$-2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -0,75; \quad \sin 2\alpha = 0,75;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = \boxed{0,75}.$$

7) $2\cos 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \cos 12\alpha$, если $\cos\alpha = 0,2$.

$$2\cos 5\alpha \cdot \cos 7\alpha - \cos 12\alpha = \cos 2\alpha + \cos 12\alpha - \cos 12\alpha = \quad 7.7$$

$$= \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot 0,04 - 1 = \boxed{-0,92}.$$

8) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0,1$.

$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \right] = \quad 5.3$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha) = 0,5(1 - 0,1) = \boxed{0,45}. \quad 3.5$$

9) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6} - 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{3}$.

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6} - 2\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} - \operatorname{tg} 2\alpha\right)}{1 + \operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha}; \quad 4.5$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{1 - 27} = \frac{6\sqrt{3}}{-26} = -\frac{3\sqrt{3}}{13}; \quad 5.5$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6} - 2\alpha\right) = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{13}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{13}} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-13 + 9)}{3 \cdot 13 + 9} = -\frac{12}{48} = \boxed{-0,25}.$$

$$10) \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}, \text{ если } \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3} \text{ и } \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} 7.1 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{-2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} = \\ 7.2 \quad &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$11) 0,2 \cos(\alpha - \beta), \text{ если } \cos \alpha \cdot \cos \beta = -\frac{1}{4} \text{ и } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} 7.1 \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] = -\frac{1}{4}; \\ \cos \frac{\pi}{3} + \cos(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2}; \quad \cos(\alpha - \beta) = -1; \\ 0,2 \cos(\alpha - \beta) &= 0,2 \cdot (-1) = \boxed{-0,2}. \end{aligned}$$

$$12) \sin x, \text{ если } \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{0,44}.$$

$$\begin{aligned} 5.1 \quad \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 &= \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,44; \\ 1 - \sin x &= 0,44; \quad \sin x = \boxed{0,56}. \end{aligned}$$

$$13) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}, \text{ если } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} 5.1 \quad \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4}; \\ 1 - \sin 2\alpha &= \frac{3}{4}; \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{8}; \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(1 + 0,125)}{0,125} = \frac{9\sqrt{3}}{2} = \boxed{4,5\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Решение карточки 9

1. Вычислите:

$$\begin{aligned}
 1) & 4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ) = & (7.2) \\
 & = 4 \left[2 \sin \frac{24^\circ + 84^\circ}{2} \cdot \sin \frac{84^\circ - 24^\circ}{2} + \left(-2 \sin \frac{48^\circ + 12^\circ}{2} \cdot \sin \frac{48^\circ - 12^\circ}{2} \right) \right] = \\
 & = 4 \cdot 2(\sin 54^\circ \cdot \sin 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 18^\circ) = \\
 & = 4(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 4 \cdot 2 \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2} \cdot \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2} = & (7.4) \\
 & = 8 \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 8 \sin(90^\circ - 72^\circ) \cdot \cos 36^\circ = & (3.6) \\
 & = 8 \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{8 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \\
 & = \frac{2 \cdot 2 \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = & (5.1) \\
 & = \frac{2 \sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \boxed{2}. & (3.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) & \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ = \\
 & = \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 43^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \times \\
 & \quad \times \operatorname{ctg}(90^\circ - 43^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - 41^\circ) \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - 1^\circ) = \\
 & = \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 43^\circ \cdot 1 \times \\
 & \quad \times \operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 41^\circ \cdot \operatorname{tg} 39^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ = \\
 & = (\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ) \cdot (\operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ) \cdot \dots \cdot (\operatorname{ctg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ) = \\
 & = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \boxed{1}.
 \end{aligned}$$

$$3) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha, \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5.$$

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot 0,5}{1 + (0,5)^2} = \frac{4}{5}; & (5.3) \\
 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\
 &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^2 - 1 = \\
 &= \frac{2 \cdot 16}{25} - 1 = \boxed{\frac{7}{25}}.
 \end{aligned}$$

$$4) \frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}, \text{ если } \alpha = 7^\circ.$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} &= \frac{1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)}{1 - (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)} = \\ &= \frac{1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)}{1 - [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha]} = \\ &= \frac{1 - [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha]}{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1 - 1 + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \left[\frac{3}{2} \right], \end{aligned}$$

т.е. значение выражения не зависит от α на области существования.

$$\begin{aligned} 5) \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^{-1} \cdot \operatorname{arctg} 1 &= \\ &= \left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)^{-1} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{6}{5\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \left[\frac{3}{10} \right]. \end{aligned}$$

$$6) \cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3).$$

Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, $\beta = \operatorname{arctg} 3$,

тогда $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

$$5.4 \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = \frac{-3}{5} = -0,6;$$

$$5.4 \quad \cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \cos 2\beta = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5};$$

$$5.3 \quad \sin 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \sin 2\beta = \frac{2 \cdot 3}{1 + 3^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

$$5.1 \quad \sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta; \quad \sin 4\beta = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{24}{25}.$$

Тогда $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = \cos 2\alpha - \sin 4\beta =$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{9}{25} = \left[0,36 \right].$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = |\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha|.$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left| \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \left| \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right| = \left| \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right| = 5.1 \\ &= \left| \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \right| = \left| \frac{2}{\sin 2\alpha} \right|. \end{aligned}$$

Так как наибольшее значение $\sin 2\alpha = 1$, то наименьшее значение $f(\alpha) = 2$.

3. Решите уравнения:

$$1) \cos^2(\pi x) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) = 2, \text{ если } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

$$1 - \sin^2(\pi x) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x) = 2;$$

$$\text{обозначим } \sin(\pi x) = t, \text{ тогда } 2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 16}}{4} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \notin E(\sin x) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Итак, } \sin(\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\pi x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k; \quad \pi x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^k \frac{1}{4} + k; \quad \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{4} + k \leq \frac{1}{2} \\ (-1)^k \frac{1}{4} + k \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{При } k = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ при других } k \text{ решения нет.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{4}.$$

$$2) \cos(\pi x) + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2, \text{ если } 2 \leq x \leq 6.$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \cos(\pi x) = -1 \\ \sin \frac{5\pi x}{2} = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x = \pi + 2\pi k \\ \frac{5\pi x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ x = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}n \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}n \leq 6 \\ -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}n \geq 2 \\ 1 + 2k \leq 6 \\ 1 + 2k \geq 2 \\ 1 + 2k = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}n \end{cases};$$

$$\begin{cases} k \leq 2,5 \\ k \geq 0,5 \\ n \leq \frac{31}{4} \\ n \geq \frac{11}{4} \\ 2n = 3 + 5k \end{cases}; \quad \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \\ n = 7 \\ n = 6 \\ n = 5 \\ n = 4 \\ n = 3 \\ 2n = 3 + 5k \end{cases}.$$

$$\text{Проверяя пары, получаем } \begin{cases} k = 1 \\ n = 4 \end{cases}; \quad x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

$$3) \operatorname{tg}^2 \pi x + \operatorname{ctg}^2 \pi x = 2, \text{ если } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \pi x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi x} = 2; \quad \operatorname{tg}^4 \pi x - 2 \operatorname{tg}^2 \pi x + 1 = 0;$$

$$(\operatorname{tg}^2 \pi x - 1)^2 = 0; \quad \operatorname{tg}^2 \pi x = 1;$$

2.3

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \pi x = 1 \\ \operatorname{tg} \pi x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \pi x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} + k \\ x = -\frac{1}{4} + n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

$$\left[\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} + k < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + k > -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} + n < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} + n > -\frac{1}{2} \end{array} \right. \right] ; \quad \left[\left\{ \begin{array}{l} k < \frac{1}{4} \\ k > -\frac{3}{4} \\ n < \frac{3}{4} \\ n > -\frac{1}{4} \end{array} \right. \begin{array}{l} k=0 \\ \\ n=0 \\ \end{array} \right] ; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{array} \right].$$

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right\}$.

Решение карточки 10

1. Вычислите:

$$1) \sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 340^\circ =$$

3.16

$$= \sin(180^\circ - 20^\circ) \cdot \cos(90^\circ + 20^\circ) +$$

3.1

$$+ \sin(270^\circ - 20^\circ) \cdot \cos(360^\circ - 20^\circ) +$$

3.30

$$+ \operatorname{tg}(90^\circ + 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}(360^\circ - 20^\circ) =$$

3.9

4.4

$$= \sin 20^\circ \cdot (-\sin 20^\circ) - \cos 20^\circ \cdot \cos 20^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ =$$

$$= -\cos(20^\circ - 20^\circ) + 1 = -\cos 0^\circ + 1 = -1 + 1 = \boxed{0}.$$

$$2) \frac{1 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos^{-4} \alpha =$$

$$= \frac{1 - (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^4 \alpha} =$$

$$= \frac{1 - [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha]}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \boxed{2}.$$

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = 2;$$

4.6

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha};$$

5.5

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{1} \right) = \boxed{-7}.$$

4) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5$.

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = \\ = \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x;$$

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = 5^2 = 25; \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = 25;$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \boxed{23}.$$

5) $A = \sin \left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17} \right).$

Обозначим $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha$, $\arcsin \frac{15}{17} = \beta$ ($\alpha, \beta \in \text{I}$);

тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{15}{17}$; $A = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$;

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{15}{17}}{1 + \frac{8}{17}} = \frac{15}{17} \cdot \frac{17}{25} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5};$$

$$A = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}.$$

6) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right).$

Обозначим $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$ ($\alpha \in \text{I}$),

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) = \beta$$
 ($\beta \in \text{II}$).

Тогда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -2$.

1.5

1.1

5.1

5.9

1.4

а) Найдем $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} 2\beta} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{6}} = \boxed{-2}.$$

2. Найдите наибольшее значение функции

$$f(\alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$f(\alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{8} (1 - \cos 4\alpha);$$

$$-1 \leq \cos 4\alpha \leq 1; \quad 1 \geq -\cos 4\alpha \geq -1;$$

$$2 \geq -\cos 4\alpha + 1 \geq 0; \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{8} (1 - \cos 4\alpha) \geq 0.$$

Наибольшее значение функции $f(\alpha) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

3. Решите уравнения:

$$1) 2 \cos(\pi x) + 3 \sin(\pi x) = 5, \text{ если } 1 \leq x \leq 2.$$

$$\begin{cases} \cos(\pi x) = 1 \\ \sin(\pi x) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi x = 2\pi k \\ \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2k \\ x = \frac{1}{2} + 2n \end{cases} \quad \emptyset.$$

Ответ: $x \in \emptyset$.

$$2) \sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x), \text{ если } 0 \leq x \leq 2.$$

$$\begin{aligned} & \sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) + \\ & + 2 \sin^2(\pi x) \cdot \cos^2(\pi x) - 2 \sin^2(\pi x) \cdot \cos^2(\pi x) = \\ & = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x))^2 - 2 \sin^2(\pi x) \cdot \cos^2(\pi x) = \\ & = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x); \end{aligned}$$

$$2 - \sin^2(2\pi x) - \sin(2\pi x) = 0;$$

$$\sin^2(2\pi x) + \sin(2\pi x) - 2 = 0;$$

$$(\sin(2\pi x))_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2};$$

$$\begin{cases} \sin 2\pi x = -2 \notin [-1; 1]; \\ \sin 2\pi x = 1 \end{cases}; \quad \sin(2\pi x) = 1;$$

2.2

$$2\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = \frac{1}{4} + k.$$

Придавая k различные целые значения, отберем только те, при которых $x \in [0; 2]$.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{4}; 1 \frac{1}{4} \right\}$.

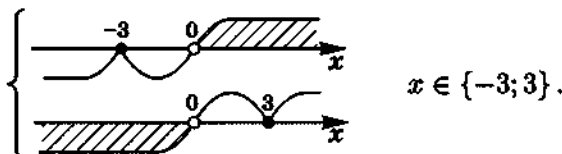
3) $x^2 + 6x \cdot \sin \frac{\pi x}{2} + 9 = 0$.

а) При $x = 0$ $9 = 0$ — ложь.

б) Рассмотрим случай $x \neq 0$. Тогда

$$\sin \frac{\pi x}{2} = -\frac{x^2 + 9}{6x}; \quad -1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1;$$

$$-1 \leq -\frac{x^2 + 9}{6x} \leq 1; \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 9 + 6x}{6x} \geq 0 \\ \frac{x^2 - 6x + 9}{6x} \leq 0 \end{cases};$$



Проверка показывает, что $x = -3$ и $x = 3$ — корни.

Ответ: $\{-3; 3\}$.

Решение карточки 11

1. Вычислите:

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{6\pi + \pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = -\sin \frac{\pi}{12};$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4};$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2};$$

$$\text{поэтому } \cos \frac{7\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12} = \boxed{-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}.$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} 7^\circ \cdot \sin 14^\circ - 1}{\cos 14^\circ} = \frac{\frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} \cdot 2 \sin 7^\circ \cdot \cos 7^\circ - 1}{\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ - \cos^2 7^\circ}{\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ} = \frac{\sin^2 7^\circ - \cos^2 7^\circ}{\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ} = \boxed{-1}.$$

$$3) \cos 47^\circ - \cos 13^\circ + \cos 73^\circ =$$

$$= \cos(60^\circ - 13^\circ) - \cos 13^\circ + \cos(60^\circ + 13^\circ) =$$

$$= \cos 60^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 13^\circ - \cos 13^\circ +$$

$$+ \cos 60^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 13^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 13^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 13^\circ - \cos 13^\circ + \frac{1}{2} \cos 13^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 13^\circ = \boxed{0}.$$

$$4) \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ =$$

$$= \sin 40^\circ \cdot (\sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ) = \cos 50^\circ \cdot (\cos 10^\circ \cdot \cos 70^\circ) =$$

$$= \cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 80^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4} (\cos 130^\circ + \cos 30^\circ) + \frac{1}{4} \cos 50^\circ =$$

$$= \frac{1}{4} (-\cos 50^\circ + \cos 50^\circ) + \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

5) $A = 162(\sin^4 x + \cos^4 x)$, если $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{2}{9} = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = \quad 5.1$$
$$= -\sin 2x + 1;$$

$$\frac{2}{9} = 1 - \sin 2x; \quad \sin 2x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9};$$

$$A = 162(\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$
$$= 162((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = \quad 5.1$$

$$= 162 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) = 162 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{9} \right)^2 \right) =$$

$$= 162 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{81} \right) = 162 \left(1 - \frac{49}{162} \right) =$$

$$= 162 \left(\frac{162 - 49}{162} \right) = 162 - 49 = \boxed{113}.$$

6) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) +$$
$$+ 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$
$$= 1 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$
$$= \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \boxed{1}.$$

7) $\arccos(-0,5 \cdot \sqrt{3}) : \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \quad 8.1$

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) : \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{6}{\pi} = \boxed{5}.$$

8) $A = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 3 \operatorname{arctg}(-2)\right).$

Обозначим $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$, $\operatorname{arctg} 2 = \beta$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \beta = 2.$$

$$\begin{aligned} 4.9 \quad A &= \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} - 3 \operatorname{arctg}(-2) \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta \right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} 3\beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 3\beta}; \end{aligned}$$

$$5.9 \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{1}{2}$$

(так как $\alpha \in I$ четверти).

$$4.5 \quad \operatorname{tg} 3\beta = \operatorname{tg}(\beta + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} 2\beta};$$

$$5.5 \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}, \text{ поэтому}$$

$$\operatorname{tg} 3\beta = \frac{2 - \frac{4}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{2}{11}.$$

Значит

$$A = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{11}{22} + \frac{4}{22}}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{15}{22} \cdot \frac{11}{10} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

2. Найдите область изменения функции

$$f(\beta) = 2 \sin^2 \beta + 3 \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

$$3.2 \quad f(\beta) = 2 \sin^2 \beta + 3 = 1 - \cos 2\beta + 3 = 4 - \cos 2\beta;$$

$$D(f): \begin{cases} \cos \beta \neq 0 \\ \sin \beta \neq 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \beta \neq \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z}.$$

$$-1 \leq \cos 2\beta \leq 1; \quad 1 \geq -\cos 2\beta \geq -1; \quad 5 \geq 4 - \cos 2\beta \geq 3;$$

Но $\cos 2\beta = 1$ при $\beta = \pi k \notin D(f)$,

$$\cos 2\beta = -1 \text{ при } \beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \notin D(f).$$

Значит, $5 > 4 - \cos 2\beta > 3$, т.е. наибольшего и наименьшего значения у функции нет.

Ответ: $E(f) = (3; 5)$.

3. Решите уравнение

$$\cos(\pi x) - 2 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) = 2, \text{ если } -6 \leq x \leq -2.$$

$$\cos(\pi x) - 4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2 = 2; \quad \cos(\pi x) - 4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0. \quad (5.2)$$

$$\text{Так как } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \text{ то} \quad (5.2)$$

$$4 \cos^3\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0.$$

$$\text{а) } \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 0; \quad \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}; \quad x = 1,5 + 3k. \quad (2.1)$$

По условию $-6 \leq x \leq -2$, тогда

$$\begin{cases} 1,5 + 3k \leq -2 \\ 1,5 + 3k \geq -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3k \leq -3,5 \\ 3k \geq -7,5 \end{cases}; \quad -2,5 \leq k \leq -\frac{7}{6}.$$

Подходит $k = -2$, тогда $x = -4,5$.

$$\text{б) } 4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - 3 = 0;$$

$$\left(\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4};$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = 1,5 \notin [-1; 1] \\ \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\pi x}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \pm 2 + 6n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

По условию $-6 \leq x \leq -2$, т. е.

$$\begin{cases} \begin{cases} 2 + 6n \leq -2 \\ 2 + 6n \geq -6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 + 6n \leq -2 \\ -2 + 6n \geq -6 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} n \leq -\frac{2}{3} \\ n \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} n \leq 0 \\ n \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}.$$

Если $n = -1$, то $x = -4$; если $n = 0$, то $x = -2$.

Ответ: $\{-4,5; -4; -2\}$.

Решение карточки 12

1. Вычислите:

$$1) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{Учтем, что } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ тогда } \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \boxed{2 + \sqrt{3}}.$$

$$2) \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} =$$

$$= \cos \frac{6\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{2 \sin \frac{3\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{5}} = \frac{\cos \frac{6\pi}{5} \cdot \sin \frac{6\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{12\pi}{5}}{4 \sin \frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{5} \right)}{4 \sin \frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{4 \sin \frac{3\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin \left(\pi - \frac{3\pi}{5} \right)}{4 \sin \frac{3\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{5}}{4 \sin \frac{3\pi}{5}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

$$3) \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ =$$

$$= \frac{1 - 4 \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2 \cdot 2 \sin \frac{140^\circ}{2} \cdot \sin \frac{20^\circ}{2}}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 + 2 \left(-2 \sin \frac{60^\circ + 80^\circ}{2} \cdot \sin \frac{80^\circ - 60^\circ}{2} \right)}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 + 2(\cos 80^\circ - \cos 60^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{1 + 2 \left(\cos 80^\circ - \frac{1}{2} \right)}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 + 2 \left(\sin 10^\circ - \frac{1}{2} \right)}{\sin 10^\circ} = \frac{1 + 2 \sin 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \boxed{2}.$$

$$4) A = \cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

Рассмотрим отдельно три суммы: 2-го и 7-го, 3-го и 6-го, 4-го и 5-го слагаемых:

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{6\pi}{7} - \frac{\pi}{7}}{2} = \quad (7.1)$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{5\pi}{14} = 0.$$

$$\text{Аналогично } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = 0 \text{ и } \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} = 0.$$

Следовательно, $A = 1 + 0 + 0 + 0 = \boxed{1}$.

$$5) \cos(2 \operatorname{arctg} 7) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3);$$

Обозначим $\operatorname{arctg} 7 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 3 = \beta$ ($\alpha, \beta \in I$).

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = 7$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

а) Вычислим $\cos 2\alpha$.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 49} = \frac{1}{50}. \quad (1.5)$$

$$\text{Значит, } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{50} - 1 = -\frac{24}{25}. \quad (3.2)$$

б) Вычислим $\sin 4\beta$.

$$\sin 4\beta = \sin(2\beta + 2\beta) = \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \cos 2\beta \cdot \sin 2\beta = \quad (4.1)$$

$$= 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta;$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}; \quad (1.5)$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = \frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5} \quad (2\beta \in II); \quad (5.2)$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}. \quad (5.1)$$

$$\text{Значит, } \sin 4\beta = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Таким образом, } \cos 2\alpha - \sin 4\beta = -\frac{24}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = \boxed{0}.$$

$$6) A = \operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13} \right).$$

Обозначим $\arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \alpha$, $\arcsin \frac{12}{13} = \beta$ ($\alpha, \beta \in I$).

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \sin \beta = \frac{12}{13}.$$

$$A = \operatorname{tg}(2\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

а) Вычислим $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{25}{26} - 1 =$$

$$= \frac{25}{13} - 1 = \frac{12}{13} \quad (2\alpha \in I).$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{12^2}} = \frac{5}{12}.$$

б) Вычислим $\operatorname{tg} \beta$.

$$\sin \beta = \frac{12}{13}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Таким образом, } A = \frac{\frac{5}{12} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{25 - 144}{12 \cdot 5 \cdot 2} = \boxed{-\frac{119}{120}}.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(\alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha.$$

$$f(\alpha) = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) =$$

$$= 1 \cdot \left[((\sin^2 \alpha)^2 + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha)^2) - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \right] =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) = \frac{3}{8} \cos 4\alpha + \frac{5}{8}.$$

$$-1 \leq \cos 4\alpha \leq 1; \quad -\frac{3}{8} \leq \frac{3}{8} \cos 4\alpha \leq \frac{3}{8}; \quad \frac{1}{4} \leq \frac{3}{8} \cos 4\alpha + \frac{5}{8} \leq 1.$$

Значит, наименьшее значение функции $f(\alpha) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

3. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{ctg}(\pi x) = \sin^{-1}(\pi x) - \cos^{-1}(\pi x),$$

если $-1 \leq x \leq 1,5$.

$$\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\cos(\pi x)};$$

$$\frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x) \cos(\pi x)} = \frac{\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)};$$

$$\begin{cases} (\sin(\pi x) - \cos(\pi x))(\sin(\pi x) + \cos(\pi x)) = -(\sin(\pi x) - \cos(\pi x)), \\ \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) \neq 0 \\ \cos(\pi x) \neq 0 \\ \begin{cases} \sin(\pi x) = \cos(\pi x) \\ \sin(\pi x) + \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \end{cases}; \begin{cases} \pi x \neq \pi k \\ \pi x \neq \pi n + \frac{\pi}{2} \mid k, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}; \begin{matrix} 7.10 \\ 2.2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \pi x \neq \pi k \\ \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi t \\ \pi x = \pi + 2\pi k \\ \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \end{cases}; \begin{cases} x \neq k \\ x \neq \frac{1}{2} + n \\ \begin{cases} x = \frac{1}{4} + t \\ x = 1 + 2p \\ x = -\frac{1}{2} + 2m \end{cases} \mid t, p, m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 & x = -\frac{3}{4} \\ t = 0 & x = \frac{1}{4} \\ t = 1 & x = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{4} \right\}.$$

Решение карточки 13

1. Вычислите:

$$1) \sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 1;$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \begin{matrix} 5.3 \\ 5.4 \\ 5.5 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 2\alpha &= \frac{2(-(\sqrt{2}+1))}{1 + (-(\sqrt{2}+1))^2} = \frac{-2(\sqrt{2}+1)}{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1} = \\ &= \frac{-2(\sqrt{2}+1)}{2(2+\sqrt{2})} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 2\alpha &= \frac{1 - (-(\sqrt{2}+1))^2}{1 + (-(\sqrt{2}+1))^2} = \frac{1 - (\sqrt{2}+1)^2}{1 + (\sqrt{2}+1)^2} = \\ &= \frac{1 - 2 - 2\sqrt{2} - 1}{1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1} = \frac{-2(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

$$2) 4 \cos 20^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ =$$

$$= 4 \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ - \sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ - \sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2}{\sin 20^\circ} \left(\sin 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ \right) =$$

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ} (\sin 40^\circ - \cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ) = \quad 7.7$$

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ} \left(\sin 40^\circ - \frac{1}{2} (\cos 50^\circ + \cos 10^\circ) \right) = \quad \begin{matrix} 3.5 \\ 3.6 \end{matrix}$$

$$= \frac{2}{\sin 20^\circ} \left(\sin 40^\circ - \frac{1}{2} \sin 40^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) = \quad 7.4$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{1}{2} (\sin 40^\circ - \sin 80^\circ) = \\
 &= \frac{1}{\sin 20^\circ} \cdot 2 \cdot \sin \frac{40^\circ - 80^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ + 80^\circ}{2} = \\
 &= \frac{2}{\sin 20^\circ} \cdot \sin(-20^\circ) \cdot \cos 60^\circ = -2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-1}.
 \end{aligned}$$

2. Решите уравнения:

1) $1 + 2 \cos \frac{\pi x}{15} = 0.$

2.1 $\cos \frac{\pi x}{15} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi x}{15} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm 10 + 30k.$

Ответ: $\{\pm 10 + 30k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

2) $2 \cos(x + 60^\circ) \cdot \cos 3x = \cos(x + 60^\circ).$

2.1 $2 \cos(x + 60^\circ) \left[\cos 3x - \frac{1}{2} \right] = 0;$

$$\begin{cases} x + 60^\circ = 90^\circ + 180^\circ k \\ 3x = \pm 60^\circ + 360^\circ n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 30^\circ + 180^\circ k \\ x = \pm 20^\circ + 120^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{30^\circ + 180^\circ k; \pm 20^\circ + 120^\circ n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}.$

3) $\frac{\sin x}{\cos 60^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} x.$

$\cos x \neq 0; \quad \sin x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \operatorname{tg} x;$

2.1
2.2 $\sin \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0; \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4) $\cos 4x = \sin 2x$, если $0 < x < 80^\circ$.

$$1 - 2\sin^2 2x = \sin 2x; \quad 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = -90^\circ + 360^\circ k \\ 2x = (-1)^n 30^\circ + 180^\circ n \end{cases};$$

2.2

$$\begin{cases} x = -45^\circ + 180^\circ k \\ x = (-1)^n 15^\circ + 90^\circ n \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0^\circ < -45^\circ + 180^\circ k < 80^\circ & k \in \mathbb{Z} \\ 0^\circ < (-1)^n 15^\circ + 90^\circ n < 80^\circ & n = 0, n = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\{15^\circ, 75^\circ\}$.

5) $\frac{\sin 4x}{\cos 5x} = -1$, если $80^\circ < x < 180^\circ$.

$$\cos 5x \neq 0; \quad x \neq 18^\circ + 36^\circ t \mid t \in \mathbb{Z};$$

2.1

$$\sin 4x + \cos 5x = 0; \quad \sin 4x + \sin(5x + 90^\circ) = 0;$$

3.2

7.3

$$2 \cdot \sin \frac{4x + 5x + 90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{4x - 5x - 90^\circ}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin(4,5x + 45^\circ) = 0 \\ \cos(0,5x + 45^\circ) = 0 \end{cases};$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} 4,5x + 45^\circ = 180^\circ k \\ 0,5x + 45^\circ = 90^\circ + 180^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}; \quad \begin{cases} x = -10^\circ + 40^\circ k \\ x = 90^\circ + 360^\circ n \end{cases};$$

$$\begin{cases} 80^\circ < -10^\circ + 40^\circ k < 180^\circ \\ 80^\circ < 90^\circ + 360^\circ n < 180^\circ \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = 3 & x = 110^\circ \\ k = 4 & x = 150^\circ \\ n = 0 & x = 90^\circ \notin \text{ОДЗ} - t = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{110^\circ; 150^\circ\}$.

6) $\sin(30^\circ - x) \cdot \cos(60^\circ + x) = 1$.

$$\sin(30^\circ - x) = \cos[90^\circ - (30^\circ - x)] = \cos(60^\circ + x);$$

3.5

$$\cos^2(60^\circ + x) = 1;$$

1.1

$$\sin^2(60^\circ + x) = 0; \quad 60^\circ + x = 180^\circ k; \quad x = -60^\circ + 180^\circ k.$$

2.2

Ответ: $\{-60^\circ + 180^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$7) (1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x.$$

$$2 \cos^2 x \cdot \sin x - \cos^2 x = 0; \quad 2 \cos^2 x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0;$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$8) 9 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin^2 x = 6. \quad \boxed{\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1} \quad 1.10$$

$$9 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 4 \sin^2 x = 6.$$

Обозначим $\sin^2 x = t$, $t \in [0; 1]$; тогда

$$\frac{9}{t} + 4t - 15 = 0; \quad 4t^2 - 15t + 9 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{8} = \frac{15 \pm 9}{8} = \begin{cases} 3 \notin [0; 1] \\ \frac{3}{4} \end{cases};$$

2.2

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}; \quad \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$9) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

5.1

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{5}{8};$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{5}{8}; \quad \sin^2 2x = \frac{3}{4};$$

2.2

$$\begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Можно обобщить: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}t \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$10) \sqrt{3} \sin^2 x + 5 \cos^2 x - (5\sqrt{3} + 1) \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - (5\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + 5 = 0;$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)_{1,2} &= \frac{5\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{(5\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \cdot 5\sqrt{3}}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 1 \pm (5\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}} = \left[\frac{5}{\sqrt{3}}; \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x &= 5 \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \left[\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} 5 + \pi k \\ x &= \frac{\pi}{6} + \pi n \end{aligned} \right. \mid k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ответ: $\left\{ \operatorname{arctg} 5 + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$11) 1 - \cos \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{4}. \quad \boxed{1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (5.0)$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{4} - \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} = 0; \quad \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} \left(2 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} - 1 \right) = 0; \quad (5.1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{4} \left(\sin \frac{x}{2} - 1 \right) = 0; \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{4} &= 0 \\ \sin \frac{x}{2} &= 1; \\ \cos \frac{x}{4} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{4} &= \pi k \\ \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ \frac{x}{4} &\neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} (2.1) \\ (2.2) \\ (2.3) \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 4\pi k \\ x &= \pi + 4\pi n; \\ x &\neq 2\pi + 4\pi t \end{aligned} \right\} \left[\begin{aligned} x &= 4\pi k \\ x &= \pi + 4\pi n \end{aligned} \mid k, n \in \mathbb{Z}. \right.$$

Ответ: $\{4\pi k; \pi + 4\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$.

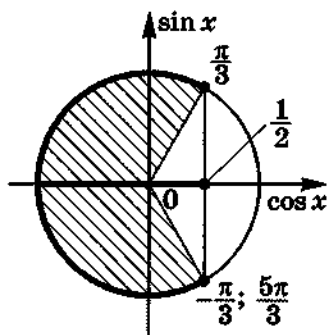
3. Решите неравенство $\sqrt{10 - 18 \cos x} \geq 6 \cos x - 2$.

$$\begin{cases} 6 \cos x - 2 \geq 0 \\ 10 - 18 \cos x \geq (6 \cos x - 2)^2; \\ 6 \cos x - 2 < 0 \\ 10 - 18 \cos x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{3} \\ 36 \cos^2 x - 6 \cos x - 6 \leq 0 \\ \cos x < \frac{1}{3} \\ \cos x \leq \frac{5}{9} \end{cases}; \quad \begin{cases} 6 \cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0 \\ \cos x \geq \frac{1}{3} \\ \cos x < \frac{1}{3} \\ \cos x \leq \frac{5}{9} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \left(\cos x + \frac{1}{3}\right) \leq 0 \\ \cos x \geq \frac{1}{3} \\ \cos x < \frac{1}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{3} \\ \cos x \geq \frac{1}{3} \\ \cos x < \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \cos x \leq \frac{1}{2}.$$



$$2\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \geq x \geq \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{3} + 2\pi k \geq x \geq \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

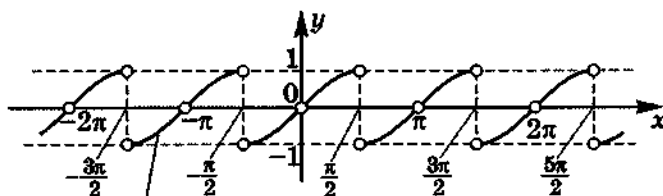
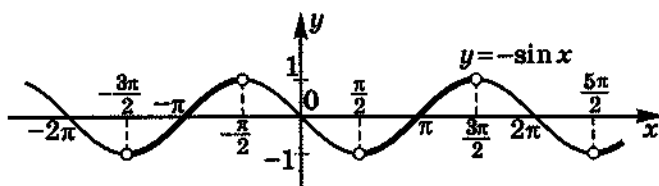
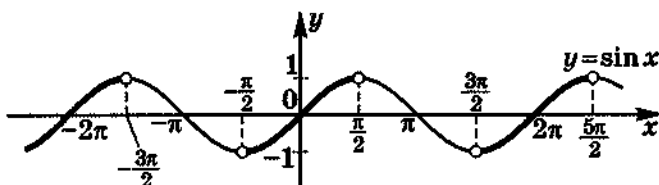
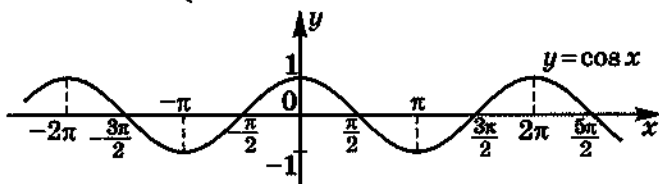
Ответ: $\left\{ \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 1\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

4. Постройте график $y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \frac{\cos^2(-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x)}$.

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin x} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|} \cdot \operatorname{tg} x =$$

$$= \begin{cases} \sin x, & \cos x > 0 \ (\sin x \neq 0) \\ -\sin x, & \cos x < 0 \ (\sin x \neq 0) \end{cases}.$$

По условию $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}; \quad x \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}.$



$$y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\cos^2(-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x)}$$

Решение карточки 14

1. Докажите тождества:

$$1) \frac{(1 - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

$$L = \frac{(1 - \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \boxed{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) =$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right);$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \\ \Pi = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} =$$

$$= \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x}.$$

Так как $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}$, то

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos 2x};$$

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin x}{\cos 2x \cdot \cos 3x};$$

.....

$$\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} 9x = \frac{\sin x}{\cos 9x \cdot \cos 10x};$$

$$\operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x =$$

$$= \sin x \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} \right),$$

$$\text{но } \operatorname{tg} 10x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin 9x}{\cos x \cdot \cos 10x}, \text{ тогда}$$

7.6

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 9x \cdot \cos 10x} =$$

$$= \frac{\sin 9x}{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 10x} = \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x};$$

5.1

$$\begin{aligned} L &= \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x} \\ \Pi &= \frac{2 \sin 9x}{\sin 2x \cdot \cos 10x} \end{aligned} \quad \Rightarrow L = \Pi.$$

2. Решите уравнения:

1) $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$

$$3(1 - \cos^2 2x) + 7 \cos 2x - 3 = 0; \quad 3 \cos^2 2x - 7 \cos 2x = 0; \quad 1.1$$

$$3 \cos 2x \left(\cos 2x - \frac{7}{3} \right) = 0; \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 2\frac{1}{3} \notin [-1; 1] \end{cases}; \quad 2.1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

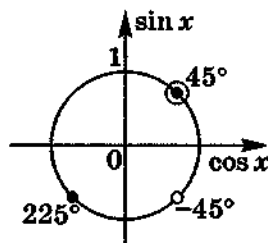
2) $\frac{\sin(x - 45^\circ)}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0;$

$$\begin{cases} \sin(x - 45^\circ) = 0 \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 45^\circ = 180^\circ k \\ x \neq \pm 45^\circ + 360^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z};$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} x = 45^\circ + 180^\circ k \\ x \neq \pm 45^\circ + 360^\circ n \end{cases};$$



$$x = 225^\circ + 360^\circ n \mid n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \{225^\circ + 360^\circ n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$3) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 4x.$$

7.6

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

2.2

$$\frac{\sin(4x - x)}{\cos x \cdot \cos 4x} = 0; \quad \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \cos(x + 360^\circ) = \cos(2x - 270^\circ), \text{ если } 270^\circ < x < 360^\circ.$$

5.1

$$\cos x = -\sin 2x; \quad 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x = 0;$$

$$2 \cos x \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 180^\circ k \\ x = (-1)^n \cdot (-30^\circ) + 180^\circ n \end{cases};$$

$$\begin{cases} 270^\circ < 90^\circ + 180^\circ k < 360^\circ & k \in \emptyset \\ 270^\circ < (-1)^n \cdot (-30^\circ) + 180^\circ n < 360^\circ & n = 2 \end{cases}; \quad x = 330^\circ.$$

$$\text{Ответ: } x = 330^\circ.$$

$$5) \sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3} \sin 2x.$$

7.4

$$2 \sin \frac{3x - 7x}{2} \cdot \cos \frac{3x + 7x}{2} - \sqrt{3} \sin 2x = 0;$$

2.1

2.2

$$-2 \sin 2x \left(\cos 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0; \quad \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k \\ 5x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2}k; \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

6) $\sin x \cdot \cos 5x = \sin 9x \cdot \cos 3x.$

7.3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sin(x+5x) + \sin(x-5x)] &= \\ &= \frac{1}{2} [\sin(9x+3x) + \sin(9x-3x)]; \end{aligned}$$

$$\sin 6x - \sin 4x = \sin 12x + \sin 6x; \quad \sin 12x + \sin 4x = 0;$$

7.3

$$2 \sin 8x \cdot \cos 4x = 0;$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} 8x = \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{8}k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{8}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

7) $\sin \frac{x}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{6} + 1 = 0.$

$$2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{6} \right) = -1;$$

$$2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{x}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{x}{6} \right) = -1;$$

9.4

$$\cos \left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}; \quad \frac{x}{6} - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;$$

2.1

$$\frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pi \pm 4\pi + 12\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{ \pi \pm 4\pi + 12\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$

1.7 8) $2 \cos x \cdot \cos 4x = \cos 3x$.

2.1 $\cos(x+4x) + \cos(x-4x) = \cos 3x; \quad \cos 5x = 0;$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $\left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

7.11 9) $2 \cos 4x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

3.1

$$2 \cos 4x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right);$$

7.2

$$\cos 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0;$$

$$-2 \sin \frac{4x + x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{4x - x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

2.2

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{5x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi k \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

ОТВЕТ: $\left\{ -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

5.1

10) $\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8 \sin x}, \quad D(Y) : \sin x \neq 0;$

5.1

$$\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{8}; \quad \sin 4x = \frac{1}{2};$$

2.2

$$4x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k \in D(Y).$$

ОТВЕТ: $\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$11) \cos x + \sin x = \sqrt{1 - 2 \cos^2 x}.$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{-\cos^2 x + \sin^2 x};$$

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0 \\ (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)(-\cos x + \sin x) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0 \\ (\cos x + \sin x)[\cos x + \sin x + \cos x - \sin x] = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0 \\ \begin{cases} \cos x + \sin x = 0; \\ 2 \cos x = 0 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos x + \sin x \geq 0 \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Проверим решения уравнений на соответствие неравенству.

$$a) \text{ Рассмотрим } x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad (2.3)$$

корень уравнения $\operatorname{tg} x = -1$.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \quad (7.10)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin \pi n \geq 0,$$

т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ — корень.

$$б) \text{ Рассмотрим } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ корень уравнения } \cos x = 0. \quad (2.1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \quad (3.1)$$

$$= -\sin \pi k + \cos \pi k = \cos \pi k \geq 0 \text{ при } k = 2m. \quad (3.3)$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7.2

5.1

$$12) \cos 2x - \cos 3x = \sin 5x.$$

$$-2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \left(-\frac{x}{2} \right) - 2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2} = 0;$$

$$-2 \sin \frac{5x}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \right) = 0;$$

7.2

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{2} = 0 \\ -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases};$$

2.2

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{2} = 0 \\ 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + \frac{5x}{2}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{5x}{2}}{2} = 0 \end{cases};$$

2.2

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} = \pi k \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{5}k \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi n \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi t \end{cases};$$

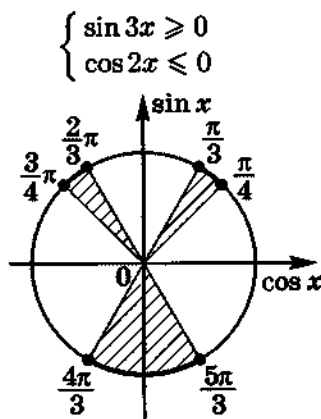
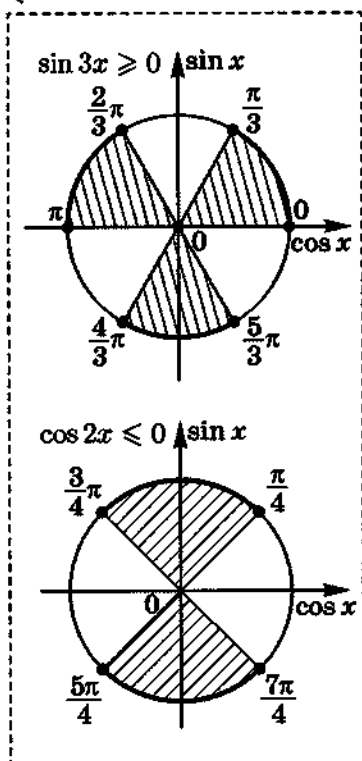
$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{5}k \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \mid k, n, t \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}t \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{5}k; -\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}t \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

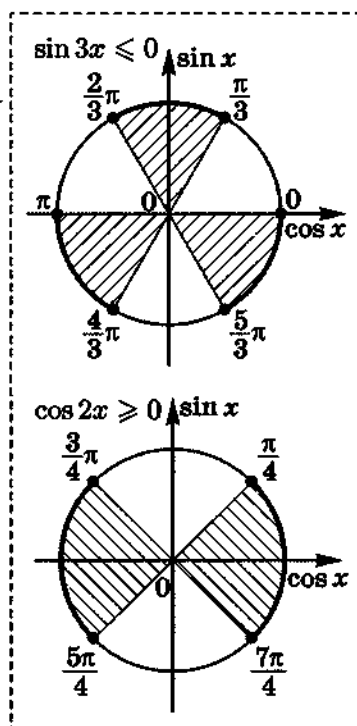
3. Решите неравенство $\sin 5x + \sin x \leq 0$.

$$2 \sin 3x \cdot \cos 2x \leq 0; \quad \begin{cases} \sin 3x \geq 0 \\ \cos 2x \leq 0 \\ \sin 3x \leq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}.$$

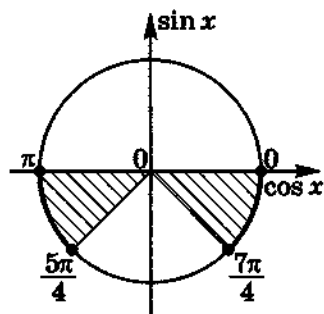
$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \begin{cases} \sin 3x \geq 0 \\ \cos 2x \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \pi + 2\pi k \geq 3x \geq 2\pi k \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}; \\
 & \begin{cases} \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \geq x \geq \frac{2\pi}{3}k \\ \frac{3\pi}{4} + \pi n \geq x \geq \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};
 \end{aligned}$$



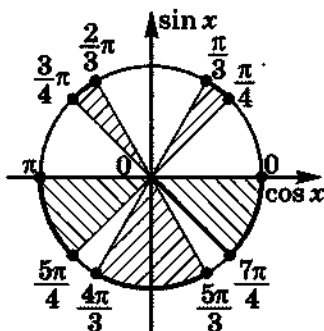
$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} \sin 3x \leq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2\pi + 2\pi k \geq 3x \geq \pi + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \geq 2x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}; \\
 & \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \geq x \geq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k \\ \frac{\pi}{4} + \pi n \geq x \geq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases};
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \sin 3x \leq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}$$



Объединяем две серии решений, получая серию из пяти отрезков:



Ответ: $\left\{ \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right]; \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right]; \right.$
 $\left[\pi + 2\pi t; \frac{5\pi}{4} + 2\pi t \right]; \left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi m; \frac{5\pi}{3} + 2\pi m \right];$
 $\left. \left[\frac{7\pi}{4} + 2\pi l; 2\pi + 2\pi l \right] \mid k, n, t, m, l \in \mathbb{Z} \right\}.$

Решение карточки 15

1. Вычислите:

$$1) \cos(2\alpha - \beta), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \text{ при } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin 2\alpha \cdot \sin \beta; \quad 4.4$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{12^2 - 5^2}{12^2 + 5^2} = \frac{119}{169}; \quad 5.4$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{-2 \cdot 5 \cdot 12}{12^2 + 5^2} = -\frac{120}{169}; \quad 5.3$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{3}{5}, \text{ так как } \cos \beta > 0 \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right); \quad 1.5$$

$$\sin \beta = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \beta; \quad \sin \beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Итак,

$$\cos(2\alpha - \beta) = \frac{119}{169} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{120}{169}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{357 - 480}{169 \cdot 5} = \boxed{-\frac{123}{845}}.$$

$$2) \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}. \quad 5.2$$

5.1

$$\text{Так как } \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \cos 54^\circ, \text{ то} \quad 3.6$$

$$2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ. \quad 5.1$$

$$\text{Так как } \cos 18^\circ \neq 0, \text{ то } 2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3, \text{ т. е.}$$

$$2 \sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3; \quad 4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0; \quad 6.2$$

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Так как $\sin 18^\circ > 0$, то подходит корень

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$a) \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

5.2

$$6) \cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \\ = \frac{16 - 2 \cdot (5 - 2\sqrt{5} + 1)}{16} = \frac{16 - 12 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

5.2

$$b) \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)^2 - 1 = \\ = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1 - 8}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$r) \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

2. Докажите тождества:

$$1) \frac{\sin \alpha + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$L = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)}{2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) - \sqrt{3} \cos \alpha} =$$

5.2

5.4

$$= \frac{\sin \alpha + 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha - 2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha}{2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \alpha + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \Rightarrow L = \Pi.$$

$$\Pi = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$2) \quad 8 \operatorname{ctg} 24\alpha + 4 \operatorname{tg} 12\alpha + 2 \operatorname{tg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

Преобразуем левую часть равенства, разбивая ее на слагаемые.

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \operatorname{ctg} 24\alpha + \operatorname{tg} 12\alpha &= \frac{2 \cos 24\alpha}{\sin 24\alpha} + \frac{\sin 12\alpha}{\cos 12\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \sin 12\alpha \cdot \sin 24\alpha}{\sin 24\alpha \cdot \cos 12\alpha} = \\ & \quad (\text{так как } \cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \sin 12\alpha \cdot \sin 24\alpha = \cos 12\alpha) \quad (4.4) \\ &= \frac{\cos 24\alpha \cdot \cos 12\alpha + \cos 12\alpha}{\sin 24\alpha \cdot \cos 12\alpha} = \frac{\cos 24\alpha + 1}{\sin 24\alpha} = \operatorname{ctg} 12\alpha. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$8 \operatorname{ctg} 24\alpha + 4 \operatorname{tg} 12\alpha = 4(2 \operatorname{ctg} 24\alpha + \operatorname{tg} 12\alpha) = 4 \operatorname{ctg} 12\alpha.$$

б) Аналогично

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{ctg} 12\alpha + \operatorname{tg} 6\alpha &= \frac{2 \cos 12\alpha}{\sin 12\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos 12\alpha \cdot \cos 6\alpha + \sin 6\alpha \cdot \sin 12\alpha}{\sin 12\alpha \cdot \cos 6\alpha} = \quad (4.4) \\ &= \frac{\cos 12\alpha \cdot \cos 6\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 12\alpha \cdot \cos 6\alpha} = \frac{\cos 12\alpha + 1}{\sin 12\alpha} = \operatorname{ctg} 6\alpha. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Следовательно, $4 \operatorname{ctg} 12\alpha + 2 \operatorname{tg} 6\alpha = 2 \operatorname{ctg} 6\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{в) Точно так же } 2 \operatorname{ctg} 6\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{2 \cos 6\alpha}{\sin 6\alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos 6\alpha \cdot \cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cdot \sin 6\alpha}{\sin 6\alpha \cdot \cos 3\alpha} = \quad (4.4) \\ &= \frac{\cos 6\alpha + 1}{\sin 6\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha. \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \left. \begin{array}{l} L = \operatorname{ctg} 3\alpha \\ \Pi = \operatorname{ctg} 3\alpha \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Решите уравнения:

$$1) \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = \operatorname{ctg} 5x.$$

$$\text{Так как } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}, \text{ то } \frac{\sin\left(5x - \frac{x}{4}\right)}{\sin 5x \cdot \sin \frac{x}{4}} = 0; \quad (7.6)$$

2.2

$$\begin{cases} \sin 4\frac{3}{4}x = 0 \\ \sin 5x \neq 0 \\ \sin \frac{x}{4} \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{19x}{4} = \pi k \\ 5x \neq \pi n \\ \frac{x}{4} \neq \pi t \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{4\pi}{19}k \\ x \neq \frac{\pi}{5}n \\ x \neq 4\pi t \end{cases} \mid k, n, t \in \mathbb{Z};$$

тогда $x = \frac{4\pi}{19}k$, где k не кратно 19 ($k \not\vdash 19$).

Ответ: $\left\{ \frac{4\pi}{19}k \mid k \not\vdash 19 \text{ и } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3.6

2) $\sin 6x = \cos 4x$ при $0 < x < 90^\circ$.

7.4

$$\sin 6x - \sin(90^\circ - 4x) = 0;$$

$$2 \sin \frac{6x - 90^\circ + 4x}{2} \cdot \cos \frac{6x + 90^\circ - 4x}{2} = 0;$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \sin(5x - 45^\circ) = 0 \\ \cos(x + 45^\circ) = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 9^\circ + 36^\circ k \\ x = 45^\circ + 180^\circ n \end{cases}$$

Произведем отбор корней, чтобы $0 < x < 90^\circ$. Придавая k и n соответствующие целые значения, получим: $x_1 = 9^\circ$, $x_2 = 45^\circ$, $x_3 = 81^\circ$.

Ответ: $\{9^\circ; 45^\circ; 81^\circ\}$.

3.6

3) $\sin(x - 45^\circ) = \cos(3x - 180^\circ)$ при $0 < x < 180^\circ$.

$$\sin(x - 45^\circ) = \sin(90^\circ - 3x + 180^\circ);$$

7.4

$$\sin(x - 45^\circ) - \sin(270^\circ - 3x) = 0;$$

$$2 \sin \frac{x - 45^\circ - 270^\circ + 3x}{2} \cdot \cos \frac{x - 45^\circ + 270^\circ - 3x}{2} = 0;$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \sin(2x - 157^\circ 30') = 0 \\ \cos(x - 112^\circ 30') = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x - 157^\circ 30' = 180^\circ k \\ x - 112^\circ 30' = 90^\circ + 180^\circ n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 78^\circ 45' + 90^\circ k \\ x = 202^\circ 30' + 180^\circ n \end{cases} \mid k, n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая условие $0 < x < 180^\circ$:

$$x_1 = 78^\circ 45', \quad x_2 = 168^\circ 45', \quad x_3 = 22^\circ 30'.$$

Ответ: $\{22^\circ 30'; 78^\circ 45'; 168^\circ 45'\}$.

$$4) \cos 3x - \cos 7x = \sin 5x. \quad (1.2)$$

$$2 \sin \frac{3x+7x}{2} \cdot \sin \frac{7x-3x}{2} = \sin 5x;$$

$$2 \sin 5x \cdot \sin 2x - \sin 5x = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x = \pi k \\ 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}. \quad (2.2)$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{5}k; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$5) \cos(20^\circ + x) + \cos(100^\circ - x) = \frac{1}{2}. \quad (1.1)$$

$$2 \cos \frac{20^\circ + x + 100^\circ - x}{2} \cdot \cos \frac{20^\circ + x - 100^\circ + x}{2} = \frac{1}{2};$$

$$2 \cos 60^\circ \cdot \cos(x - 40^\circ) = \frac{1}{2}; \quad \cos(x - 40^\circ) = \frac{1}{2}; \quad (2.1)$$

$$x - 40^\circ = \pm 60^\circ + 360^\circ k.$$

$$\text{Ответ: } \{40^\circ \pm 60^\circ + 360^\circ k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$6) \cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x. \quad (5.7)$$

$$\frac{1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x + 1 + \cos 8x}{2};$$

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x; \quad (7.1)$$

$$2 \cos x \cdot \cos 3x - 2 \cos 7x \cdot \cos x = 0;$$

$$2 \cos x (\cos 3x - \cos 7x) = 0; \quad 4 \cos x \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x = 0; \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0; \\ \sin 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2x = \pi t \\ 5x = \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}n \\ x = \frac{\pi}{5}k \end{cases}. \quad (2.1)$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{5}k; \frac{\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.2)$$

$$5.1 \quad 7) \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

$$7.8 \quad \sin 2x \cdot \sin x \cdot \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = 0;$$

$$\sin 2x \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 0;$$

$$2.1 \quad \sin 2x \cdot \cos 4x = 0;$$

$$2.2 \quad \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \pi k \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7.1 \quad 8) \cos 3x + \cos 2x = \sin 5x.$$

$$5.1 \quad 2 \cos 2,5x \cdot \cos 0,5x = 2 \sin 2,5x \cdot \cos 2,5x;$$

$$2 \cos 2,5x \cdot (\cos 0,5x - \sin 2,5x) = 0;$$

$$2.1 \quad \text{a) } \cos 2,5x = 0; \quad 2,5x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} k.$$

$$3.5 \quad \text{б) } \cos 0,5x - \sin 2,5x = 0;$$

$$7.2 \quad \cos 0,5x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2,5x \right) = 0;$$

$$2 \sin \frac{0,5x + \frac{\pi}{2} - 2,5x}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 2,5x - 0,5x}{2} = 0;$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 1,5x \right) = 0;$$

$$2.2 \quad \begin{cases} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin \left(1,5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \pi t \\ 1,5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi t \\ 1,5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi t \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi t; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n; \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} k \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

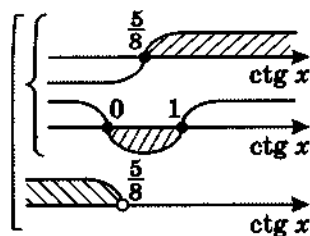
4. Решите неравенства:

1) $\sqrt{25 - 16 \operatorname{ctg} x} \geq 8 \operatorname{ctg} x - 5.$

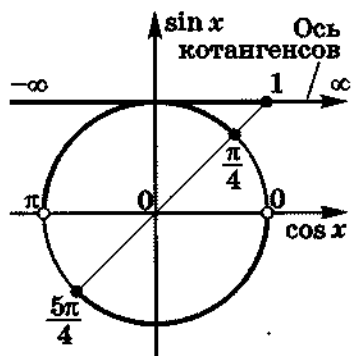
$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq b^2 \\ b < 0 \\ a \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8 \operatorname{ctg} x - 5 \geq 0 \\ 25 - 16 \operatorname{ctg} x \geq 64 \operatorname{ctg}^2 x - 80 \operatorname{ctg} x + 25; \\ 8 \operatorname{ctg} x - 5 < 0 \\ 25 - 16 \operatorname{ctg} x \geq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq \frac{5}{8} \\ \operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x - 1) \leq 0 \\ \operatorname{ctg} x < \frac{5}{8} \\ \operatorname{ctg} x \leq \frac{25}{16} \end{cases};$$



$$\begin{cases} \frac{5}{8} \leq \operatorname{ctg} x \leq 1 \\ \operatorname{ctg} x < \frac{5}{8} \end{cases}; \operatorname{ctg} x \leq 1;$$

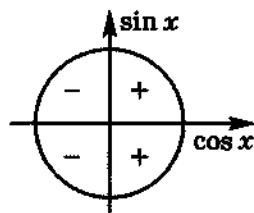


$$\pi + \pi k > x \geq \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

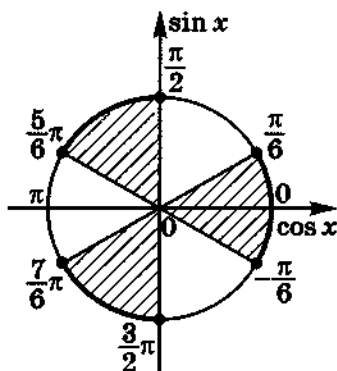
2) $\cos x + \cos 5x \leq 0$.

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x \leq 0;$$



a) $\begin{cases} \cos 3x \geq 0; \\ \cos 2x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi k \geq 3x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi t \geq 2x \geq \frac{\pi}{2} + 2\pi t; \end{cases}$

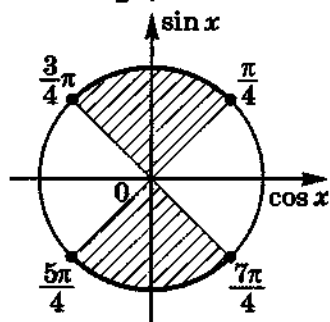
$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \geq x \geq -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k; \\ \frac{3\pi}{4} + \pi t \geq x \geq \frac{\pi}{4} + \pi t \end{cases};$$



$$k = 0; \frac{\pi}{6} \geq x \geq -\frac{\pi}{6}$$

$$k = 1; \frac{5\pi}{6} \geq x \geq \frac{\pi}{2}$$

$$k = 2; \frac{3\pi}{2} \geq x \geq \frac{7\pi}{6}$$



$$t = 0; \frac{3\pi}{4} \geq x \geq \frac{\pi}{4}$$

$$t = 1; \frac{7\pi}{4} \geq x \geq \frac{5\pi}{4}$$

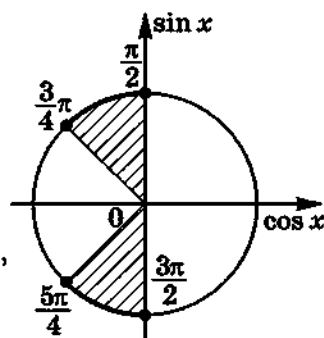
$$\text{Для } \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos 2x \leq 0 \end{cases}$$

получаем серию

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right],$$

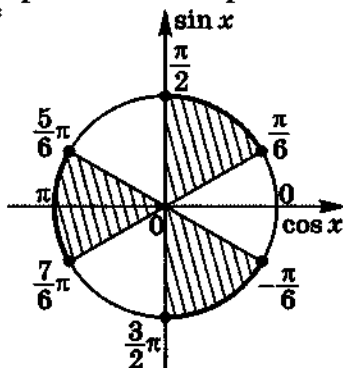
где $k, n \in \mathbb{Z}$.



$$6) \begin{cases} \cos 3x \leq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \geq 3x \geq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi p \geq 2x \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi p \end{cases};$$

2.1

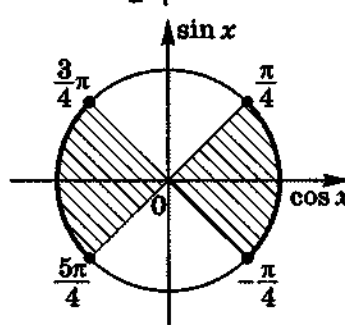
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n \geq x \geq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n \\ \frac{\pi}{4} + \pi p \geq x \geq -\frac{\pi}{4} + \pi p \end{cases};$$



$$n = 0; \quad \frac{\pi}{2} \geq x \geq \frac{\pi}{6}$$

$$n = 1; \quad \frac{7\pi}{6} \geq x \geq \frac{5\pi}{6}$$

$$n = 2; \quad \frac{11\pi}{6} \geq x \geq \frac{3\pi}{2}$$



$$p = 1; \quad \frac{\pi}{4} \geq x \geq -\frac{\pi}{4}$$

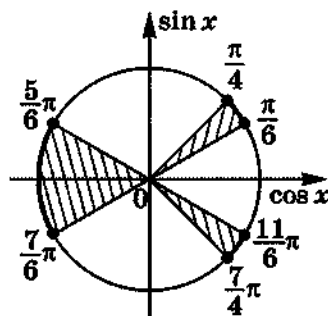
$$p = 2; \quad \frac{5\pi}{4} \geq x \geq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Для } \begin{cases} \cos 3x \leq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}$$

получаем серию

$$\begin{aligned} & \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \frac{7\pi}{6} + 2\pi t \right] \cup \\ & \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \frac{\pi}{4} + 2\pi l \right] \cup \\ & \cup \left[\frac{7\pi}{4} + 2\pi p; \frac{11\pi}{6} + 2\pi p \right], \end{aligned}$$

где $t, l, p \in \mathbb{Z}$



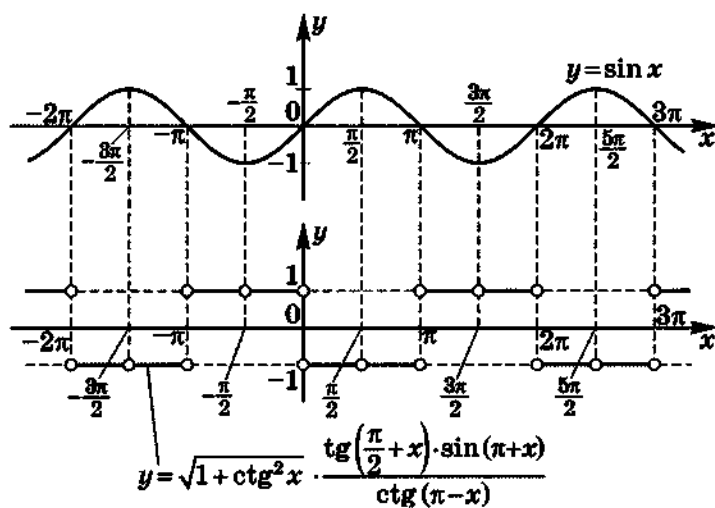
$$\begin{aligned} \text{Ответ: } & \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right]; \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]; \right. \\ & \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \frac{7\pi}{6} + 2\pi t \right]; \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \frac{\pi}{4} + 2\pi l \right]; \\ & \left. \left[\frac{7\pi}{4} + 2\pi p; \frac{11\pi}{6} + 2\pi p \right] \mid k, n, t, l, p \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

5. Постройте график

$$y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(\pi + x)}{\operatorname{ctg}(\pi - x)}.$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot (-\sin x)}{-\operatorname{ctg} x}; \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{|\sin x|} \cdot (-\sin x); \quad \begin{cases} y = -1 \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \\ \sin x > 0 \\ y = 1 \\ x \neq \frac{\pi}{2}k \\ \sin x < 0 \end{cases}.$$



Решение карточки 16

1. Найдите: $2\alpha + \beta$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$

при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

$$4.3 \quad \cos(2\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos \beta - \sin 2\alpha \cdot \sin \beta;$$

$$5.4 \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = -\frac{3}{5};$$

$$5.3 \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot (-2)}{1 + (-2)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$1.3 \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2}} = \frac{7}{10} \cdot \sqrt{2} \quad (\sin \beta > 0);$$

$$\cos \beta = \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta; \quad \cos \beta = \frac{7}{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Значит,

$$\cos(2\alpha + \beta) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{7}{10} \cdot \sqrt{2} =$$

$$2.1 \quad = \frac{28 - 3}{50} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2\alpha + \beta = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\pi < 2\alpha + \beta < 2,5\pi; \quad \pi < \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k < 2,5\pi;$$

$$\begin{cases} x = 1,75\pi \in (\pi; 2,5\pi) \\ x = 2,25\pi \in (\pi; 2,5\pi) \end{cases}.$$

Ответ: $2\alpha + \beta \in \{1,75\pi; 2,25\pi\}$.

2. Вычислите $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ =$

$$= \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} + 4 \cos 70^\circ = \frac{\cos 70^\circ + 4 \cos 70^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 70^\circ + 2 \sin 140^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{\cos 70^\circ + 2 \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

3. Докажите:

$$1) \frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

$$L = \frac{(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{1 - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

$$L = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \quad \left| \begin{array}{l} \Pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \end{array} \right. \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = 2,4,$$

$$\text{если } \cos 4\alpha = \frac{3}{5} \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} L &= 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = \\ &= 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos(2\alpha + \alpha) + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin(2\alpha + \alpha) = \\ &= 4 \sin^3 \alpha \cdot (\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha) + \\ &\quad + 4 \cos^3 \alpha \cdot (\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha) = \\ &= 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - 4 \sin^4 \alpha \cdot \sin 2\alpha + \\ &\quad + 4 \cos^4 \alpha \cdot \sin 2\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= 2 \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 4 \sin 2\alpha \cdot (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) + \\ &\quad + 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \sin 4\alpha + 4 \sin 2\alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ &\quad + \cos^2 \alpha \cdot \sin 4\alpha = \\ &= \sin 4\alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \sin 4\alpha + 2 \sin 4\alpha = 3 \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Так как } \cos 4\alpha = \frac{3}{5}, \text{ то}$$

$$\sin 4\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (0 < 4\alpha < \pi),$$

$$\text{тогда } 3 \sin 4\alpha = 3 \cdot \frac{4}{5} = 2,4. \text{ Значит,}$$

$$L = 4 \sin^3 \alpha \cdot \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \cdot \sin 3\alpha = 2,4;$$

$$\left. \begin{aligned} L &= 2,4 \\ \Pi &= 2,4 \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \cos(170^\circ + x) - \cos(50^\circ + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ если } -180^\circ < x < 90^\circ.$$

$$2 \sin \frac{170^\circ + x + 50^\circ + x}{2} \cdot \sin \frac{50^\circ + x - 170^\circ - x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2 \sin(x + 110^\circ) \cdot \sin(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin(x + 110^\circ) = -\frac{1}{2};$$

$$x + 110^\circ = (-1)^k \cdot (-30^\circ) + 180^\circ k;$$

$$x = (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ - 110^\circ + 180^\circ k.$$

Условию $x \in (-180^\circ; 90^\circ)$ удовлетворяет только $k = 0$;

$$x = -30^\circ - 110^\circ = -140^\circ \in (-180^\circ; 90^\circ).$$

Ответ: $x = -140^\circ$.

$$2) \sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0. \quad 7.8$$

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 12x) = 0;$$

$$\cos 2x - \cos 12x = 0; \quad 2 \sin 7x \cdot \sin 5x = 0; \quad 7.2$$

$$\begin{cases} \sin 7x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 7x = \pi k \\ 5x = \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{7}k \\ x = \frac{\pi}{5}n \end{cases}. \quad 2.2$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{7}k; \frac{\pi}{5}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}.$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{3};$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4.4 \quad 2.1$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$4) \sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x. \quad 7.4$$

$$\sin 7x - \sin x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 0; \quad 5.2$$

$$2 \sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 4x = 0; \quad 2 \cos 4x \left(\sin 3x + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}; \quad 2.1 \quad 2.2$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5.1

5) $3 + 2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

$$3 + 4 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$3 + 4 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}.$$

Обозначим $t = \sin x \cdot \cos x$. Получаем $3 + 4t = \frac{1}{t}$;

$$4t^2 + 3t - 1 = 0; \quad \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x \cdot \cos x = -1 \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ т. е.}$$

2.2

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x = -1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin 2x = -2 \notin [-1; 1] \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k.$$

Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

6) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$.

Пусть $x = \pi k$ (тогда $\sin \pi k = 0$).

Легко убедиться, что такой x — не корень:

$$\cos(\pi k) \cdot \cos(2\pi k) \cdot \cos(4\pi k) \cdot \cos(8\pi k) = \pm 1, \text{ и } \pm 1 \neq \frac{1}{16}.$$

Можно домножить обе части уравнения на $\sin x$:

3.1

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x;$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x; \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{4} \sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x; \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{8} \sin 8x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin x; \quad \frac{1}{16} \sin 16x = \frac{1}{16} \sin x; \quad (5.1)$$

$$\sin 16x - \sin x = 0; \quad 2 \sin 7,5x \cdot \cos 8,5x = 0; \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} \sin 7,5x = 0 \\ \cos 8,5x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 7,5x = \pi k \\ 8,5x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}; \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{15}k & (k \not\equiv 15) \\ x = \frac{\pi}{17} + \frac{2\pi}{17}n & \left(\frac{1}{17} + \frac{2}{17}n \notin \mathbb{Z} \right) \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{15}k; \frac{\pi}{17} + \frac{2\pi}{17}n \mid k, n \in \mathbb{Z}, k \not\equiv 15, \frac{1}{17} + \frac{2}{17}n \notin \mathbb{Z} \right\}.$$

$$7) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{16} + \cos 2x \text{ при } 0,5\pi \leq x \leq 1,5\pi.$$

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= 1 \cdot ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x, \text{ тогда} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{15}{16} + \cos 2x; \quad 1 - \frac{3}{4} (1 - \cos^2 2x) = \frac{15}{16} + \cos 2x;$$

$$\frac{3}{4} \cos^2 2x - \cos 2x - \frac{11}{16} = 0; \quad 12 \cos^2 2x - 16 \cos 2x - 11 = 0;$$

$$(\cos 2x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 132}}{12} = \frac{8 \pm 14}{12};$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{11}{6} \notin [-1; 1] \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k. \quad (2.1)$$

По условию $\frac{\pi}{2} \leq \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \leq 1,5\pi$;

при $k = 1$ $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_1 = 1\frac{1}{3}\pi$.

При других значениях k $x \notin \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}; 1\frac{1}{3}\pi\right\}$.

$$8) \arcsin(\cos(2 \operatorname{arccctg} x)) = 0.$$

$$\cos(2 \operatorname{arccctg} x) = 0 \quad (\arcsin 0 = 0);$$

$$2 \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{arccctg} x \leq \pi \\ 0 &\leq 2 \operatorname{arccctg} x \leq 2\pi, \text{ тогда} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} 2 \operatorname{arccctg} x &= \frac{\pi}{2} \\ 2 \operatorname{arccctg} x &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right];$$

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{arccctg} x &= \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{arccctg} x &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \right];$$

$$\left[\begin{aligned} x &= 1 \quad \left(\operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4} \right) \\ x &= -1 \quad \left(\operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned} \right].$$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

5. Решите неравенства:

1) $\arcsin x < \arccos x$.

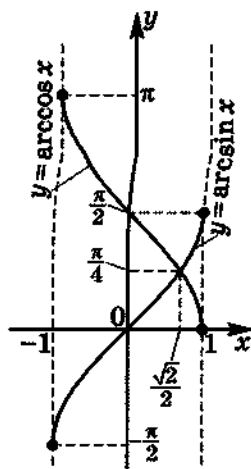
Решим неравенство графически, представив на одном графике обе функции:

Из чертежа следует, что

$$\arcsin x < \arccos x,$$

$$\text{если } x \in \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



2) $\arcsin \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} < \frac{\pi}{6}$.

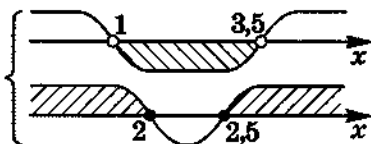
$$D(H): \left| \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} \right| \leq 1.$$

Так как $y(x) = \sin x$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\sin \left(\arcsin \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} \right) < \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} < \frac{1}{2} \\ -1 \leq \frac{2x^2 - 9x + 8}{2} \leq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 8 < 1 \\ 2x^2 - 9x + 8 \geq -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x + 7 < 0 \\ 2x^2 - 9x + 10 \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } (1; 2] \cup [2.5; 3.5).$$

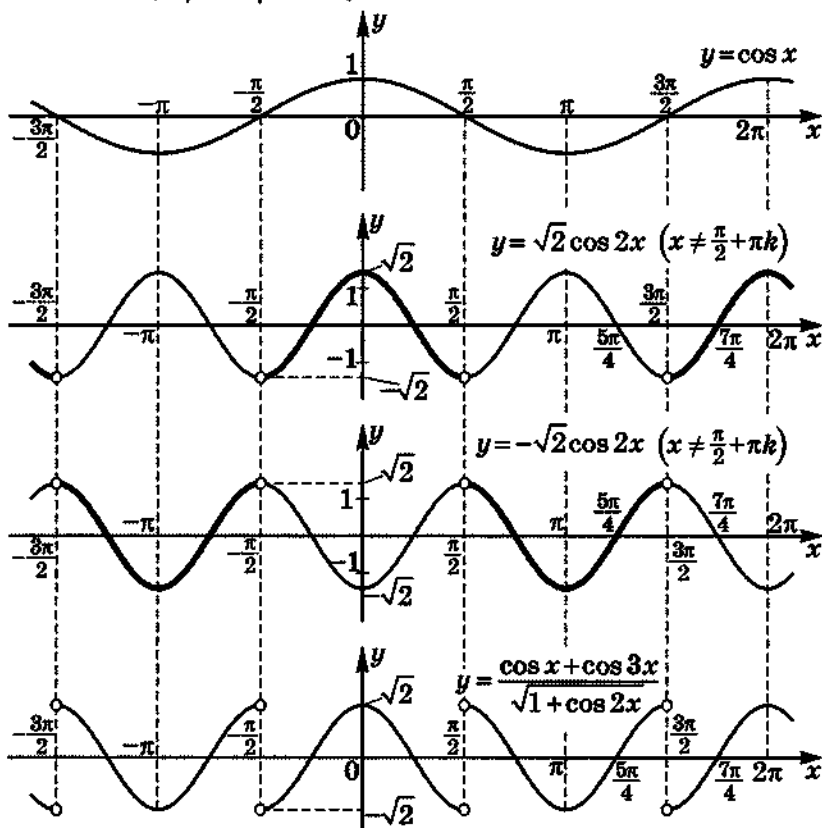
6. Постройте график $y(x) = \frac{\cos x + \cos 3x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$.

7.1

Так как $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$ и $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} |\cos x|$, тогда

$D(y)$: $\cos x \neq 0$;

$$y = \frac{2 \cos 2x \cdot \cos x}{\sqrt{2} |\cos x|} = \begin{cases} \sqrt{2} \cos 2x, & \cos x > 0 \\ -\sqrt{2} \cos 2x, & \cos x < 0 \end{cases}$$



9

Итоговые карточки

Карточка 1

1. Вычислите:

1) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

2) $\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ - \frac{1}{4 \sin 10^\circ}$.

2. Упростите
$$\frac{2 \cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \sin 2\varphi}{2 \sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{5} \right) \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{10} \right) + \sin \frac{7\pi}{10}}.$$

3. Решите уравнения:

1) $\frac{4}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$;

2) $(1 + \cos 4x) \cdot \sin(\pi - 3x) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$;

3) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

4. Докажите $\cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \sin(106^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ)$.

5. Решите неравенство $2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos 2x > 0$.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

7. Постройте график $y = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2}(1 + \cos 2x)}$.

Карточка 2

1. Вычислите:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$;

2) $\frac{2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{5\pi}{6}}{2 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{11}$.

2. Докажите:

1) $\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \frac{1}{4 \sin 5^\circ} = 0$;

2) $\cos(\alpha - 9^\circ) \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) > \sin(\alpha + 40^\circ) \cdot \cos(\alpha - 4^\circ)$.

3. Решите уравнения:

1) $\frac{2}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos 2x}$;

2) $1 + \sin x + \sin 3x + \cos(\pi + 4x) = 0$;

3) $2 \arcsin x = \arccos 2x$.

4. Решите неравенство $\sin x + \cos x > \sqrt{2} \cos 3x$.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2 \sin x + \frac{1}{\cos y} = 2 \\ \frac{\sin x}{\cos y} = 0,5 \end{cases}.$$

6. Постройте график $y = \frac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{2(1 - \cos 2x)}}$.

Карточка 3

1. Докажите:

$$1) \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \frac{1}{16};$$

$$2) \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2};$$

$$3) \operatorname{arccctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arccctg} \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4};$$

$$4) \frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} \geq 8.$$

2. Решите уравнения:

$$1) \frac{7}{4} \cos \frac{x}{4} = \cos^3 \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{2};$$

$$2) \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{64};$$

$$3) \cos(5x + 516^\circ) - \cos(3x + 172^\circ) = \cos(4x + 254^\circ).$$

3. Решите неравенство $8 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \sin x - 4 > 0$.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x$.

Карточка 4

1. Вычислите $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, если $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$
при $2,5\pi < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

2. Найдите $A(\alpha) = \frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2\sin^2 4\alpha}$,
если $\sin \alpha - \cos \alpha = m$.

3. Докажите:

1) $\operatorname{tg}^6 20^\circ - 33 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 27 \operatorname{tg}^2 20^\circ = 3$;

2) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{56}{65} = \pi$;

3) $\frac{\sin \alpha - 1}{\sin \alpha - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin \alpha}{3 - \sin \alpha}$.

4. Решите уравнения:

1) $1 + \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} \sin^2 3x$;

2) $2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{4} = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

5. Решите неравенство $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y \\ \cos^4 x = \cos y \end{cases}$.

7. Постройте график $y = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \sin \frac{x}{2}$.

Карточка 5

1. Вычислите $\operatorname{tg} 2\beta$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, если $\sin \beta = -\frac{60}{61}$ при $\beta \in [1,5\pi; 2\pi]$.
2. Упростите $\frac{4 \sin^2(45^\circ + \alpha) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{4 \sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \cos^2(45^\circ + \alpha)}$.
3. Докажите:
 - 1) $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$;
 - 2) $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Решите уравнения:
 - 1) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$;
 - 2) $3 \cos 2x + 4 \sin 2x + 5 = \sin^2 x$;
 - 3) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.
5. Решите неравенство $\sqrt{5 - 2 \sin x} \geq 6 \sin x - 1$, если $x \in [0; \pi]$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0,75 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$.
7. Постройте график $y = \operatorname{tg} \frac{x + |x|}{2} \cdot \sin 2x$.

Карточка 6

1. Вычислите $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$.
2. Найдите $\alpha + 2\beta$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ при $\alpha, \beta \in I$.
3. Упростите $A(\alpha) = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^4 \alpha}$.
4. Докажите $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} < 2$ для $\forall \alpha \in D(H)$.
5. Решите уравнения:
 - 1) $39 + 7 \sin^2 x + 12 \sin 2x = 33 \cos x + 44 \sin x$;
 - 2) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}$;
 - 3) $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi}{2}x$.
6. Решите неравенство $3 \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^2 x < -1$.
7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 2 \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 18 \end{cases}.$$
8. Постройте график
$$y = \frac{2 \sin^2(45^\circ + x) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 4 \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{4 \sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + x) \cdot \cos^2(45^\circ + x)}.$$

Карточка 7

1. Вычислите $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$.

2. Докажите:

1) $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$, где $\alpha, \beta \in I$.

2) $\operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13} \right) = -\frac{119}{120}$.

3. Найдите $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, если $\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65} \\ \cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65} \end{cases}$

при $2,5\pi < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

4. Решите уравнения:

1) $\frac{\cos^2 x (1 + \operatorname{ctg} x)}{\sin x - \cos x} = 3 \cos x$;

2) $(1 + 2 \cos 2x) \cdot \sin x + (1 - 2 \cos 2x) \cdot \cos x = 0$

при $\pi < \left| 2x - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{7\pi}{3}$;

3) $\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$.

5. Решите неравенство $\frac{\sin 3x \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin 2x} \leq 0$ на $[0; 2\pi]$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2 \sin y \cdot \sin(x + y) = \cos x \end{cases}$.

7. Постройте график $y = |\operatorname{tg} x| \cdot \sin 2x$.

Карточка 8

1. Упростите:

$$1) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sqrt{2} \sin \alpha};$$

$$2) \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha).$$

$$2. \text{ Вычислите } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

$$3. \text{ Докажите } \cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg}(x - 15^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \frac{1}{3};$$

$$2) \arcsin \frac{x}{2} + \arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6};$$

$$3) 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

$$5. \text{ Решите неравенство } 4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x.$$

$$6. \text{ Решите систему уравнений } \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$7. \text{ Постройте график } y = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sin x + \cos x.$$

Карточка 9

1. Упростите $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

2. Докажите тождества:

1) $\frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5$.

3. Решите уравнения:

1) $\frac{1 + 2 \cos 2x}{2 \cos x} = \operatorname{tg}^2 x - 3$, если $0 \leq x \leq 2\pi$;

2) $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2 \sin(80^\circ + 2x)$.

4. Докажите $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, если $A + B + C = 180^\circ$.

5. Решите неравенства:

1) $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x > 1$;

2) $\frac{\arccos(x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases}$.

7. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x + |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x$.

Карточка 10

1. Упростите:

$$1) \operatorname{tg}(35^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) - \frac{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) - 1}{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) + 1};$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ).$$

2. Докажите:

$$1) \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64};$$

$$2) \operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)} \text{ при } \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1;$$

$$3) \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > 1, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

3. Решите уравнения:

$$1) \cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x;$$

$$2) \arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$$

4. Решите неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x > 0$.

$$5. \text{ Решите систему } \begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \cdot \sin y = 0 \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10 \end{cases}.$$

$$6. \text{ Постройте график } y = \sin \frac{x - |x|}{2} \cdot \cos \frac{x + |x|}{2} + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x|.$$

Решение карточки 1

1. Вычислите:

$$1) \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

1.6

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha < 0;$$

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}.$$

5.7

$$\text{Так как } 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ \text{ и } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\text{то } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}.$$

$$2) \sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ - \frac{1}{4 \sin 10^\circ} =$$

5.8

$$= \frac{4 \sin^2 10^\circ + 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 10^\circ + 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ - 1}{4 \sin 10^\circ} =$$

7.6

$$= \frac{2(1 - \cos 20^\circ) + 2 \sin 10^\circ + 2(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) - 1}{4 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{2 - 2 \cos 20^\circ + 2 \sin 10^\circ + 2 \cos 40^\circ - 1 - 1}{4 \sin 10^\circ} =$$

7.2

$$= \frac{2 \cos 40^\circ - 2 \cos 20^\circ + 2 \sin 10^\circ}{4 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{-4 \sin 30^\circ \cdot \sin 10^\circ + 2 \sin 10^\circ}{4 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{-2 \sin 10^\circ + 2 \sin 10^\circ}{4 \sin 10^\circ} = \boxed{0}.$$

$$2. \text{ Упростите } \frac{2 \cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \sin 2\varphi}{2 \sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{5} \right) \cdot \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{10} \right) + \sin \frac{7\pi}{10}} = \quad 4.4$$

$$= \frac{2 \cos 2\varphi \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin 2\varphi \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \sin 2\varphi}{\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{5} + \varphi - \frac{\pi}{10} \right) + \sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{5} - \varphi + \frac{\pi}{10} \right) + \sin \frac{7\pi}{10}} = \quad 7.5$$

$$= \frac{\cos 2\varphi + \sqrt{3} \sin 2\varphi - \sqrt{3} \sin 2\varphi}{\sin \left(2\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(-\frac{3\pi}{10} \right) + \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{10} \right)} =$$

$$= \frac{\cos 2\varphi}{-\cos 2\varphi - \sin \frac{3\pi}{10} + \sin \frac{3\pi}{10}} = \frac{\cos 2\varphi}{-\cos 2\varphi} = \boxed{-1}.$$

3. Решите уравнения:

$$1) \frac{4}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \operatorname{tg}^2 x.$$

$$D(Y): \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -1; \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\frac{4(1 + \sin x) - 1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x};$$

$$3 + 5 \sin x = 2 \sin^2 x; \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0;$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4};$$

$$\begin{cases} \sin x = 3 \notin E(\sin x) \\ \sin x = -\frac{1}{2} \in E(\sin x); \end{cases} \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k. \quad 2.2$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) (1 + \cos 4x) \cdot \sin(\pi - 3x) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right). \quad 3.18$$

3.6

$$(1 + \cos 4x) \cdot \sin 3x = \cos^2 2x; \quad 2 \cos^2 2x \cdot \sin 3x = \cos^2 2x; \quad 5.7$$

2.1

2.2

$$\begin{cases} \cos^2 2x = 0 \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

$$D(Y): \begin{cases} |2x| \leq 1 \\ |x| \leq 1 \end{cases}; \quad |x| \leq \frac{1}{2};$$

4.3

$$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \cos \frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\arcsin 2x) \cdot \cos(\arcsin x) -$$

$$- \sin(\arcsin 2x) \cdot \sin(\arcsin x) = 0;$$

$$\text{так как } \arcsin m \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ то } \cos(\arcsin m) \geq 0;$$

9.6

$$\cos(\arcsin 2x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin 2x)} = \sqrt{1 - 4x^2};$$

9.8

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2};$$

9.1

$$\sin(\arcsin 2x) = 2x; \quad \sin(\arcsin x) = x;$$

$$\sqrt{1 - 4x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - 2x^2 = 0;$$

$$(1 - 4x^2)(1 - x^2) = 4x^4;$$

$$5x^2 = 1; \quad x^2 = \frac{1}{5} \in D(Y); \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

а) Проверим значение $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) < 0; \quad -\frac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) < 0.$$

Сложим почленно:

$$-\pi < \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) < 0, \text{ но}$$

$$\text{должно быть } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{2},$$

значит $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ — посторонний корень.

б) Проверкой можно убедиться, что $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ — корень уравнения.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

4. Докажите:

$$\cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \sin(106^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ) \Leftrightarrow \quad 3.3$$

$$\Leftrightarrow \cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \cos(16^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ) \Leftrightarrow \quad 7.9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin(\beta + 1^\circ + \beta + 19^\circ) + \sin(\beta + 1^\circ - \beta - 19^\circ)] <$$

$$< \frac{1}{2} [\sin(16^\circ + \beta + \beta + 4^\circ) + \sin(\beta + 4^\circ - 16^\circ - \beta)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2\beta + 20^\circ) - \sin 18^\circ < \sin(2\beta + 20^\circ) - \sin 12^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ > \sin 12^\circ \text{ — истинно,}$$

так как $y = \sin x$ возрастает на $(0; 90^\circ)$.

Значит, предположение верно, и неравенство

$\cos(\beta + 19^\circ) \cdot \sin(\beta + 1^\circ) < \sin(106^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta + 4^\circ)$ — истинно, что и требовалось доказать.

5. Решите неравенство $2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos 2x > 0$.

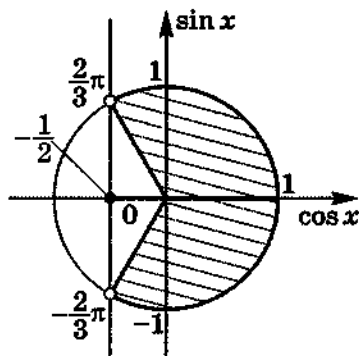
$$1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos 2x > 0; \quad 1 + \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x > 0;$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x > -\frac{1}{2}; \quad \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) > -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k > 2x - \frac{\pi}{6} > -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k > 2x > -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{5\pi}{12} + \pi k > x > -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$



Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{1}{3} \quad (3 \sin x \cdot \sin y = \cos x \cdot \cos y) \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}} & \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k & \frac{1}{2}(\textcircled{1} + \textcircled{2}) \\ x + y = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n & \frac{1}{2}(\textcircled{2} - \textcircled{1}) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k + n) \\ y = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \left(\pm \frac{\pi}{8} \right) + \pi(n - k) \end{cases}.$$

Расшифровывая, получим:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x + y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k + n) \\ y = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{8} + \pi(n - k) \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x + y = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi p \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k + p) \\ y = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p - k) \end{cases}.$$

$$\text{в). } \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi t \\ x + y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(t + n) \\ y = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(n - t) \end{cases}.$$

$$\text{г). } \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi t \\ x + y = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi p \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p + t) \\ y = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p - t) \end{cases}.$$

Отвст:

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k + n); \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{8} + \pi(n - k) \right); \right.$$

$$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(k + p); -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p - k) \right);$$

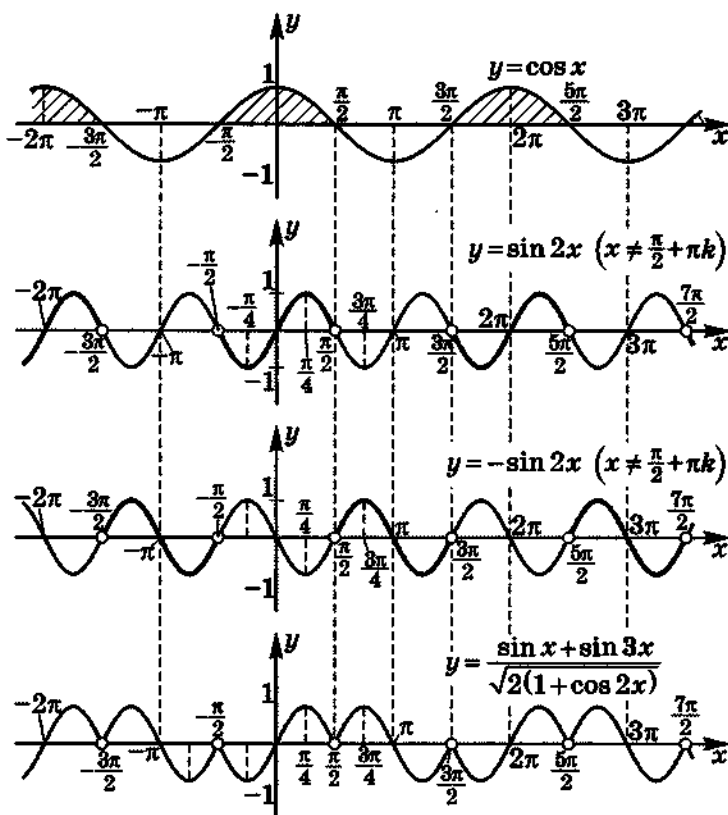
$$\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(t + n); \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(n - t) \right);$$

$$\left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p + t); \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi(p - t) \right)$$

$$| k, n, t, p \in \mathbb{Z} \}.$$

7. Постройте график $y = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2}(1 + \cos 2x)}$.

$$y = \frac{2 \sin 2x \cdot \cos x}{\sqrt{4 \cos^2 x}} = \frac{2 \sin 2x \cdot \cos x}{2 |\cos x|} = \begin{cases} \sin 2x, & \cos x > 0 \\ -\sin 2x, & \cos x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 2

1. Вычислите:

$$1) \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12} \text{ при } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha < 0 \quad \left(\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right] \right);$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = -\frac{12}{13};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \left(\frac{\alpha}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right] \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \boxed{\frac{5}{26} \sqrt{26}}.$$

$$\begin{aligned} 2) A(\alpha) &= \frac{2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{5\pi}{6}}{2 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \cos \frac{5\pi}{6}}{2 \sin 2\alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos 2\alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos 2\alpha - \sqrt{3} \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{6} + \sin 2\alpha - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin 2\alpha} = \boxed{1}. \quad \alpha \in D(A). \end{aligned}$$

2. Докажите:

$$1) \cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \frac{1}{4 \sin 5^\circ} = 0.$$

$$\begin{aligned} L &= \cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \frac{1}{4 \sin 5^\circ} = \\ &= \frac{4 \cos 5^\circ \cdot \sin 5^\circ + 4 \cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ + 4 \cos 25^\circ \cdot \sin 5^\circ - 1}{4 \sin 5^\circ} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin 10^\circ + 2(\sin 20^\circ - \sin 10^\circ) + 2(\sin 30^\circ - \sin 20^\circ) - 1}{4 \sin 5^\circ} = \\
 &= \frac{2 \sin 10^\circ + 2 \sin 20^\circ - 2 \sin 10^\circ + 1 - 2 \sin 20^\circ - 1}{4 \sin 5^\circ} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 0 \\ \Pi = 0 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \cos(\alpha - 9^\circ) \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) > \sin(\alpha + 40^\circ) \cdot \cos(\alpha - 4^\circ).$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} (\cos(\alpha - 9^\circ + \alpha - 45^\circ) + \cos(\alpha - 9^\circ - \alpha + 45^\circ)) > \\
 &> \frac{1}{2} (\sin(\alpha + 40^\circ + \alpha - 4^\circ) + \sin 44^\circ);
 \end{aligned}$$

$$\cos(2\alpha - 54^\circ) + \cos 36^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ;$$

$$\cos(2\alpha - 90^\circ + 36^\circ) + \sin 54^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ;$$

$$\sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 54^\circ > \sin(2\alpha + 36^\circ) + \sin 44^\circ;$$

$$\sin 54^\circ > \sin 44^\circ \text{ — истинно.}$$

3. Решите уравнения:

$$1) \frac{2}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos 2x}.$$

$$D(Y): \begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 1 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases};$$

$$\frac{2(1 + \operatorname{tg} x) + 1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x};$$

$$(\operatorname{tg} x + 3) \cdot \cos^2 x = 2 \cos^2 x; \quad \cos x = 0 \notin D(Y);$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \notin D(Y).$$

Ответ: $\emptyset$.

$$2) 1 + \sin x + \sin 3x + \cos(\pi + 4x) = 0.$$

$$1 + \sin x + \sin 3x - \cos 4x = 0;$$

$$(1 - \cos 4x) + (\sin x + \sin 3x) = 0;$$

$$2\sin^2 2x + 2\sin 2x \cdot \cos x = 0;$$

$$2\sin 2x(\sin 2x + \cos x) = 0;$$

$$2\sin 2x(2\sin x \cdot \cos x + \cos x) = 0;$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x(2\sin x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2}n \\ x = (-1)^{t+1} \frac{\pi}{6} + \pi t \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2}k; (-1)^{t+1} \frac{\pi}{6} + \pi t \mid k, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) 2 \arcsin x = \arccos 2x.$$

$$0 \leq \arccos 2x \leq \pi \quad \left| \Rightarrow 0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ тогда } 0 \leq x \leq 1; \right.$$

$$\cos(2 \arcsin x) = 2x; \quad \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |2x| \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$1 - 2x^2 = 2x; \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; \quad \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \notin \left[0; \frac{1}{2}\right];$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \leq \frac{1}{2}; \quad 0 \leq \sqrt{3} - 1 \leq 1;$$

$$1 \leq \sqrt{3} \leq 2 - \text{истинно.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

4. Решите неравенство $\sin x + \cos x > \sqrt{2} \cos 3x$.

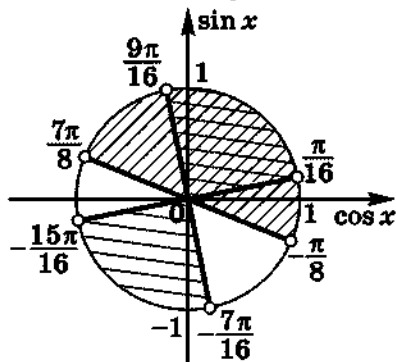
$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > \sqrt{2} \cos 3x; \quad \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 3x > 0;$$

$$-2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) > 0;$$

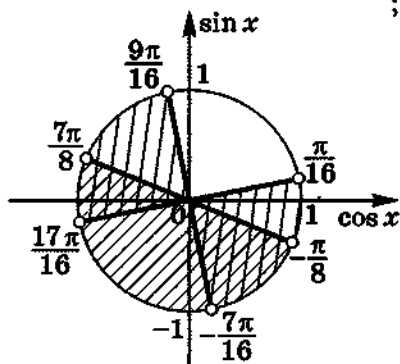
$$\sin \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) > 0;$$

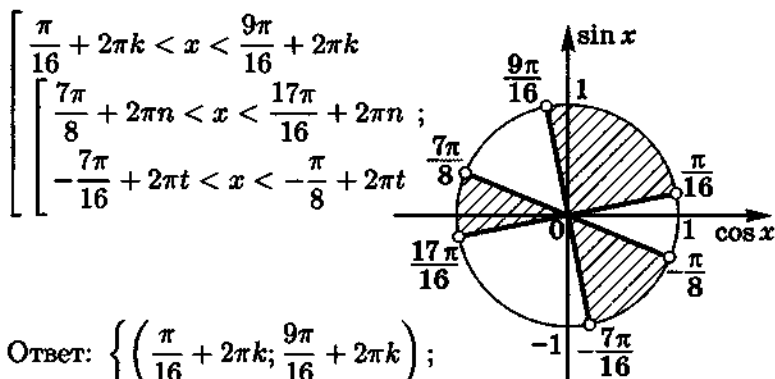
$$\left[\begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{8} \right) > 0 \\ \sin \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) > 0 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{8} \right) < 0 \\ \sin \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) < 0 \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{cases} \pi + 2\pi k > x + \frac{\pi}{8} > 2\pi k \\ \pi + 2\pi n > 2x - \frac{\pi}{8} > 2\pi n \\ 2\pi + 2\pi t > x + \frac{\pi}{8} > \pi + 2\pi t \\ 2\pi + 2\pi p > 2x - \frac{\pi}{8} > \pi + 2\pi p \end{cases} \right];$$

$$\left[\begin{cases} \frac{7\pi}{8} + 2\pi k > x > -\frac{\pi}{8} + 2\pi k \\ \frac{9\pi}{16} + \pi n > x > \frac{\pi}{16} + \pi n \end{cases} \right]$$



$$\left[\begin{cases} \frac{15\pi}{8} + 2\pi t > x > \frac{7\pi}{8} + 2\pi t \\ \frac{17\pi}{16} + \pi p > x > \frac{9\pi}{16} + \pi p \end{cases} \right]$$





Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{16} + 2\pi k; \frac{9\pi}{16} + 2\pi k \right); \right.$
 $\left(\frac{7\pi}{8} + 2\pi n; \frac{17\pi}{16} + 2\pi n \right);$
 $\left. \left(-\frac{7\pi}{16} + 2\pi t; -\frac{\pi}{8} + 2\pi t \right) \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}.$

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2\sin x + \frac{1}{\cos y} = 2 \\ \frac{\sin x}{\cos y} = 0,5 \end{cases}.$$

$$D(C): y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 2\sin x \cdot \cos y + 1 = 2\cos y; \\ 2\sin x = \cos y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos^2 y - 2\cos y + 1 = 0; \\ 2\sin x = \cos y \end{cases};$$

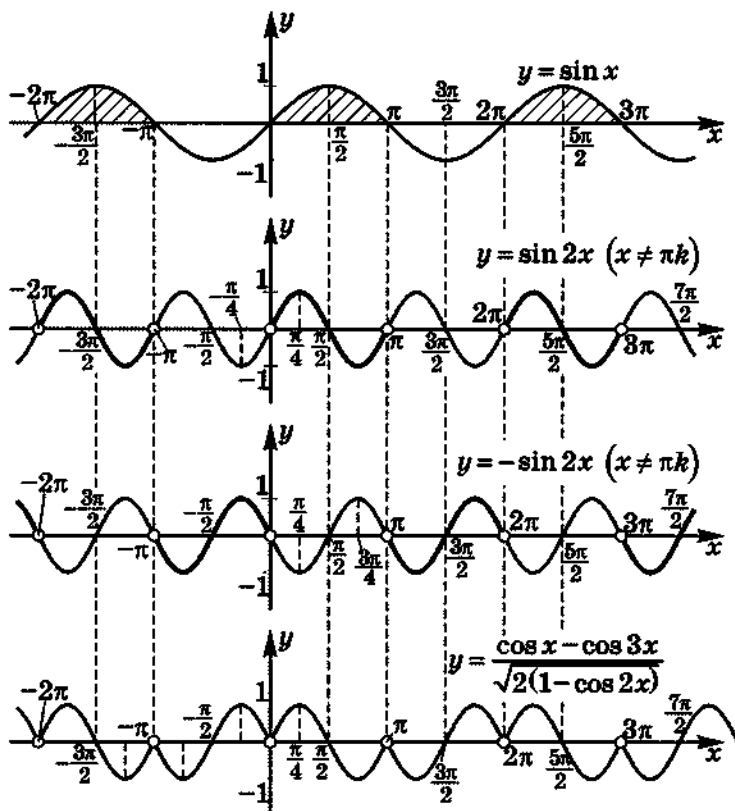
$$\begin{cases} (\cos y - 1)^2 = 0; \\ 2\sin x = \cos y \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos y = 1 \\ 2\sin x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 2\pi k \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; 2\pi k \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

6. Постройте график $y = \frac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{2(1 - \cos 2x)}}$.

$$y = \frac{2 \sin 2x \cdot \sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x}} = \frac{\sin 2x \cdot \sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} \sin 2x, & \sin x > 0 \\ -\sin 2x, & \sin x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 3

1. Докажите:

$$1) \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \frac{1}{16}.$$

$$\begin{aligned} L &= \cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 72^\circ + \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 36^\circ) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 72^\circ + \frac{1}{2} \right) \left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ + \frac{1}{2} \cos 36^\circ - \frac{1}{2} \cos 72^\circ - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ + \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \cos 72^\circ \cdot \cos 36^\circ - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{\frac{1}{16}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{так как } \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ &= \frac{4 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4}; \quad \left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{16} \\ \Pi = \frac{1}{16} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi. \end{aligned}$$

$$2) \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos \frac{6\alpha+9\alpha}{2} \cdot \cos \frac{6\alpha-9\alpha}{2} - 2 \cos \frac{7\alpha+8\alpha}{2} \cdot \cos \frac{7\alpha-8\alpha}{2}}{2 \sin \frac{6\alpha+9\alpha}{2} \cdot \cos \frac{6\alpha-9\alpha}{2} - 2 \sin \frac{7\alpha+8\alpha}{2} \cdot \cos \frac{7\alpha-8\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos \frac{15\alpha}{2} \cdot \left(\cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{15\alpha}{2} \cdot \left(\cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2} \\ \Pi &= \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2} \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow L = \Pi. \right.$$

$$3) \operatorname{arcctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Так как } \begin{cases} 0 < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < \frac{1}{7} < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

то, учитывая, что функция $\operatorname{arcctg} x$ убывает, имеем

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} > \operatorname{arcctg} \frac{1}{7} > \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} > \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} > \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 1,5\pi > \operatorname{arcctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} > \pi.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{arcctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \in (\pi; 1,5\pi).$$

Очевидно, и $\frac{5\pi}{4} \in (\pi; 1,5\pi)$ — правая и левая части расположены в одной четверти. Функция $\operatorname{tg} x$ на $(\pi; 1,5\pi)$ возрастает. Поэтому переход от равенства углов к равенству значений функции $\operatorname{tg} x$ не нарушает равносильности:

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Обозначим } \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{1}{7}, \quad \beta = 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{7} \right)} = 7;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right)}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3} \right)}} = \frac{\frac{2}{\frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{\frac{1}{9}}} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}.$$

$$L = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \quad L = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 - 7 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = 1;$$

$$\Pi = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 \\ \Pi = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$4) \frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} \geq 8.$$

Учтем, что при $a \geq 0, b \geq 0 \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Действительно,

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 - \text{истина. Поэтому}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{\sin^4 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^4 \alpha}} = \frac{2}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{2}{\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha} = \frac{8}{\sin^2 2\alpha}. \end{aligned}$$

$\sin^2 2\alpha \leq 1$, значит $\frac{1}{\sin^2 2\alpha} \geq 1$, откуда $\frac{8}{\sin^2 2\alpha} \geq 8$, что и требовалось доказать.

2. Решите уравнения:

$$1) \frac{7}{4} \cos \frac{x}{4} = \cos^3 \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{2}.$$

$$\frac{7}{4} \cos \frac{x}{4} = \cos^3 \frac{x}{4} + 2 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4};$$

$$\cos \frac{x}{4} \cdot \left(\frac{7}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} - 2 \sin \frac{x}{4} \right) = 0;$$

$$\cos \frac{x}{4} = 0; \quad \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = 2\pi + 4\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{7}{4} - 1 + \sin^2 \frac{x}{4} - 2 \sin \frac{x}{4} = 0; \quad \sin \frac{x}{4} = t; \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4}; \quad \begin{cases} \sin \frac{x}{4} = \frac{3}{2} \notin [-1; 1] \\ \sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\frac{x}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n;$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2\pi + 4\pi k; (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{64}.$$

5.7

5.8

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^5 = \frac{29}{64};$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5;$$

$$1 - 5 \cos 2x + 10 \cos^2 2x - 10 \cos^3 2x + 5 \cos^4 2x - \cos^5 2x +$$

$$+ 1 + 5 \cos 2x + 10 \cos^2 2x + 10 \cos^3 2x + 5 \cos^4 2x + \cos^5 2x = \frac{29}{2};$$

$$2 + 20 \cos^2 2x + 10 \cos^4 2x = \frac{29}{2}; \quad \cos 2x = t;$$

$$20t^2 + 40t - 25 = 0; \quad 4t^2 + 8t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4}; \quad \begin{cases} t = -2,5 \notin [-1; 1] \\ t = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}; \quad \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}; \quad \cos 4x = 0; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

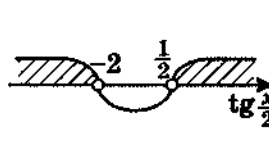
$$3) \cos(5x + 516^\circ) - \cos(3x + 172^\circ) = \cos(4x + 254^\circ).$$

$$-2 \sin(4x + 344^\circ) \cdot \sin(x + 172^\circ) = \cos(4x + 254^\circ);$$

$$2 \sin(4x + 254^\circ + 90^\circ) \cdot \sin(x + 172^\circ) + \cos(4x + 254^\circ) = 0;$$

$$2 \cos(4x + 254^\circ) \cdot \sin(x + 172^\circ) + \cos(4x + 254^\circ) = 0;$$

$$2 \cos(4x + 254^\circ) \cdot \left[\sin(x + 172^\circ) + \frac{1}{2} \right] = 0;$$



$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + \pi k > \frac{x}{2} > \arctg \frac{1}{2} + \pi k \\ \arctg(-2) + \pi n > \frac{x}{2} > -\frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

Объединяя оба случая, получаем следующий ответ.

Ответ: $\left\{ \left(2 \arctg \frac{1}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2 \arctg(-2) + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

тогда $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}; \quad \frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi k;$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin \left(y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin \left(y - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ 2 \sin \left(y - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \sin \left(y - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases};$$

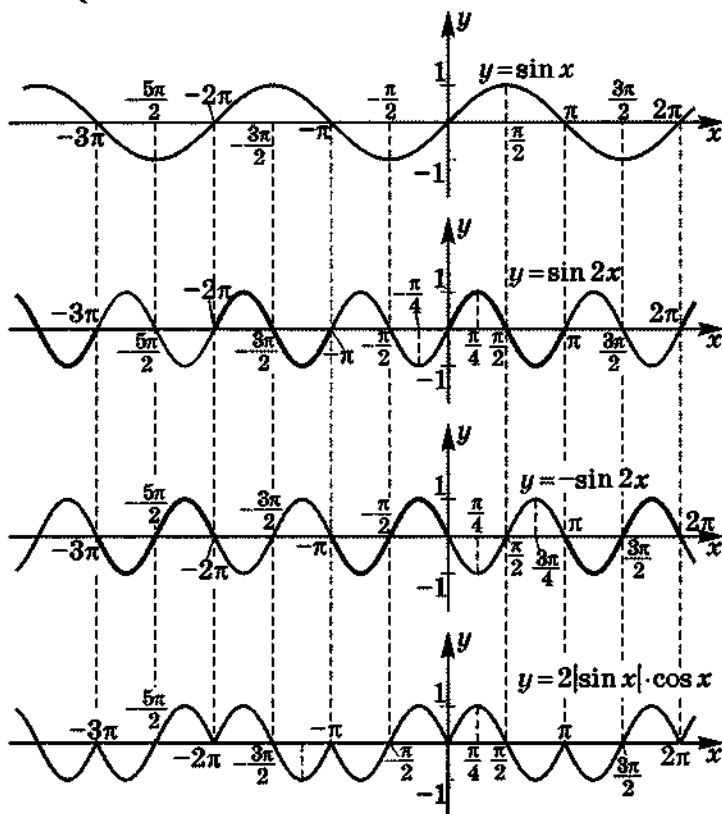
$$x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + \pi n + 2\pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n + 2k).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(-\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi(n + 2k); \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \right) \right. \\ \left. | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x$.

$$y = \begin{cases} \sin 2x, & \sin x \geq 0 \\ -\sin 2x, & \sin x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 4

1. Вычислите $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, если $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$
при $2,5\pi < \alpha < 3\pi$ и $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65}.$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}; \quad \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{7}{9}.$$

Учтем, что $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$, тогда $\pi < \frac{\alpha + \beta}{2} < 1,5\pi$, значит

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}}; \quad \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{9}{130} \sqrt{130};$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{9}{130} \cdot \sqrt{130} \right) = -\frac{7}{\sqrt{130}} = -\frac{7}{130} \cdot \sqrt{130}.$$

Так как $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65}$, то

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65 \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}, \text{ т. е. } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \boxed{\frac{27\sqrt{130}}{910}}.$$

2. Найдите $A(\alpha) = \frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2 \sin^2 4\alpha}$,

если $\sin \alpha - \cos \alpha = m$.

$$A(\alpha) = \frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2 \sin^2 4\alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin(-\alpha) \cdot \cos 5\alpha + 2 \sin 5\alpha \cdot \cos 5\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 1 + \cos 8\alpha} =$$

$$= \frac{2 \cos 5\alpha \cdot (\sin 5\alpha - \sin \alpha)}{\cos 2\alpha + \cos 8\alpha} = \frac{2 \cos 5\alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2 \cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha} =$$

$$= 2 \sin 2\alpha;$$

$m = \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$, тогда $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$;

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = m^2; \quad 1 - \sin 2\alpha = m^2; \quad \sin 2\alpha = 1 - m^2.$$

Значит, $A(\alpha) = 2(1 - m^2)$ при $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ответ: $A(\alpha) = 2(1 - m^2)$ при $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

3. Докажите:

$$1) \quad \operatorname{tg}^6 20^\circ - 33 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 27 \operatorname{tg}^2 20^\circ = 3.$$

5.9

$$\operatorname{tg}^2 20^\circ = \frac{\sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ} = \frac{1 - \cos 40^\circ}{1 + \cos 40^\circ};$$

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^6 20^\circ - 33 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 27 \operatorname{tg}^2 20^\circ = \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3} \times \\ &\quad \times \left((1 - \cos 40^\circ)^3 - 33(1 - \cos 40^\circ)^2(1 + \cos 40^\circ) + \right. \\ &\quad \left. + 27(1 - \cos 40^\circ)(1 + \cos 40^\circ)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3} \left((1 - \cos 40^\circ) \left[(1 - \cos 40^\circ)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 33(1 - \cos 40^\circ)(1 + \cos 40^\circ) + 27(1 + \cos 40^\circ)^2 \right] \right) = \\ &= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3} \left((1 - \cos 40^\circ) \left[1 - 2 \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 33 + 33 \cos^2 40^\circ + 27 + 54 \cos 40^\circ + 27 \cos^2 40^\circ \right] \right) = \\ &= \frac{(1 - \cos 40^\circ)(61 \cos^2 40^\circ + 52 \cos 40^\circ - 5)}{(1 + \cos 40^\circ)^3} = \\ &= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3} \left(61 \cos^2 40^\circ - 61 \cos^3 40^\circ + 52 \cos 40^\circ - \right. \\ &\quad \left. - 52 \cos^2 40^\circ - 5 + 5 \cos 40^\circ \right) = \\ &= \frac{-61 \cos^3 40^\circ + 9 \cos^2 40^\circ + 57 \cos 40^\circ - 5}{(1 + \cos 40^\circ)^3}. \end{aligned}$$

Используя тождество $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

при $\alpha = 40^\circ$, получаем:

$\cos 120^\circ = 4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ$; умножим на 16:

$-8 = 64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ$; $64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ + 8 = 0$;

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(1 + \cos 40^\circ)^3} \left(-61\cos^3 40^\circ + 9\cos^2 40^\circ + 57\cos 40^\circ - \right. \\ &\quad \left. - 5 + (64\cos^3 40^\circ - 48\cos 40^\circ + 8) \right) = \\ &= \frac{3\cos^3 40^\circ + 9\cos^2 40^\circ + 9\cos 40^\circ + 3}{(1 + \cos 40^\circ)^3} = \\ &= \frac{3(\cos 40^\circ + 1)^3}{(1 + \cos 40^\circ)^3} = 3. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} L = 3 \\ \Pi = 3 \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{56}{65} = \pi.$$

Предположим, что тождество выполняется. Тогда оно равносильно

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{12}{13} = \pi - \arcsin \frac{56}{65} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\underbrace{\arcsin \frac{4}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin \frac{12}{13}}_{\beta} \right) = \sin \left(\pi - \underbrace{\arcsin \frac{56}{65}}_{\gamma} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \sin \gamma;$$

$$\sin \gamma = \frac{56}{65}; \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad \cos \alpha = \frac{3}{5};$$

$$\sin \beta = \frac{12}{13}; \quad \cos \beta = \frac{5}{13}.$$

Тогда равенство равносильно

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{56}{65}; \quad \frac{56}{65} = \frac{56}{65} \text{ — истинно.}$$

Значит, предположение о справедливости тождества верно, что и требовалось доказать.

Примечание. То, что из $\alpha + \beta = \gamma$ следует, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ — очевидный факт. Но в **общем** случае из $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ не следует $\alpha + \beta = \gamma$. В данном случае следствие выполняется, так как:

$$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin \frac{4}{5} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и функция } \arcsin x \text{ возрастает на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right);$$

$$\frac{\pi}{2} \geq \arcsin \frac{12}{13} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\text{аналогично так как } \frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$0 \leq \arcsin \frac{56}{65} < \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Поэтому } \alpha + \beta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right] \text{ и } \pi - \gamma \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

А если $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma)$ и углы из одной четверти, то углы равны.

$$3) \frac{\sin \alpha - 1}{\sin \alpha - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin \alpha}{3 - \sin \alpha}.$$

Домножим обе части неравенства

на $2(2 - \sin \alpha)(3 - \sin \alpha) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 2(1 - \sin \alpha)(3 - \sin \alpha) + (2 - \sin \alpha)(3 - \sin \alpha) - 2(2 - \sin \alpha)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 - 5 \sin \alpha + \sin^2 \alpha &\geq 0 \Leftrightarrow (\sin \alpha - 1)(\sin \alpha - 4) \geq 0; \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \sin \alpha \geq 4 \quad \emptyset \\ \sin \alpha \leq 1 \quad \forall \alpha \end{cases} \text{ — истина. Сле-}$$

довательно, предположение о том, что неравенство выполнено, верно для $\forall \alpha$, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

$$1) 1 + \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} \sin^2 3x.$$

$$2 + 2 \cos 2x \cdot \cos 3x = \sin^2 3x;$$

$$1 + \sin^2 3x + \cos^2 3x + 2 \cos 2x \cdot \cos 3x + \cos^2 2x - \cos^2 2x = \sin^2 3x;$$

$$\sin^2 2x + (\cos 3x + \cos 2x)^2 = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 3x + \cos 2x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}k \\ \cos \frac{3\pi}{2}k + \cos \pi k = 0 \end{cases};$$

а) при $k = 0$ $\cos 0 + \cos 0 = 0$ — ложно;

б) при $k = 1$ $\cos \frac{3\pi}{2} + \cos \pi = 0$ — ложно;

в) при $k = 2$ $\cos 3\pi + \cos 2\pi = 0$ — истинно;

г) при $k = 3$ $\cos 4,5\pi + \cos 3\pi = 0$ — ложно.

Ответ: $\{x = \pi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$$2) 2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{4} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$L = 2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{4} \leq 2; \quad \Pi = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2;$$

$$\begin{cases} L \leq 2 \\ \Pi \geq 2 \end{cases}, \text{ значит } L = \Pi = 2. \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \text{ при } \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases};$$

Проверим левую часть:

$$а) x = 1; \quad L = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1; \quad L \neq \Pi;$$

$$б) x = -1; \quad L = 2 \sin^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad L \neq \Pi.$$

Ответ: решений нет.

5. Решите неравенство $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x$.

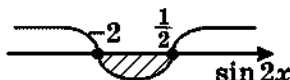
$$D(H): \cos x \neq 0;$$

$$\cos^2 2x \geq 3 \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x; \quad \cos^2 2x \geq 3 \sin x \cdot \cos x;$$

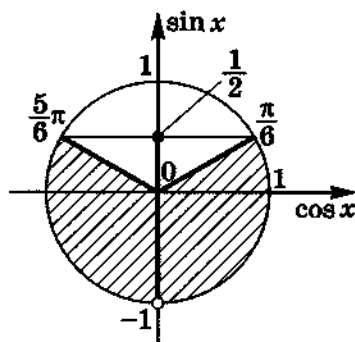
$$1 - \sin^2 2x \geq \frac{3}{2} \sin 2x; \quad 2 \sin^2 2x + 3 \sin 2x - 2 \leq 0;$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$$\begin{cases} \sin 2x = -2 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\sin 2x \leq \frac{1}{2}.$$



Из чертежа следует, что

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n > 2x \geq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{12} + \pi k \\ \frac{5\pi}{12} + \pi n \leq x < \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k \right]; \left(\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y \\ \cos^4 x = \cos y \end{cases}.$

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 y \\ \cos^8 x = \cos^2 y \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\cos^8 x + \sin^4 x = 1; \quad \cos^8 x + (1 - \cos^2 x)^2 = 1;$$

$$\cos^8 x + \cos^4 x - 2\cos^2 x = 0; \quad \cos^2 x (\cos^6 x + \cos^2 x - 2) = 0.$$

Обозначая $t = \cos^2 x$, получаем $t \cdot (t^3 + t - 2) = 0$;

$$\begin{array}{r} -\frac{t^3}{t^3-t^2} + t-2 \Big| \frac{t-1}{t^2+t+2} \quad D < 0 \\ -\frac{t^2+t-2}{t^2-t} \\ \hline -\frac{2t-2}{2t-2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}.$$

$$\text{а) } \begin{cases} \sin^2 \pi k = \sin y \\ \cos^4 \pi k = \cos y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \pi k \\ y = 2\pi p \end{cases};$$

$$y = 2\pi p; \quad (\pi k; 2\pi p) \mid k, p \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = \sin y \\ \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = \cos y \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases};$$

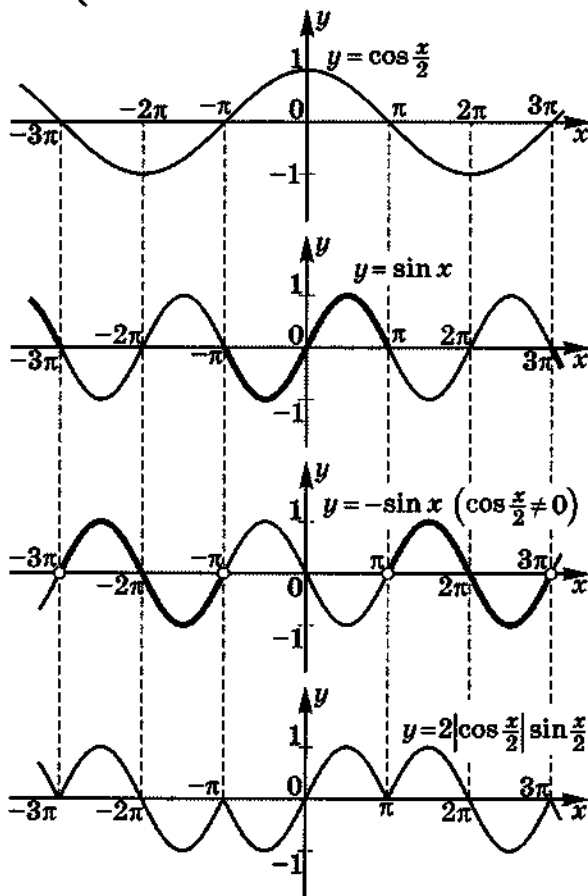
$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi t \end{cases};$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m; \quad \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ (\pi k; 2\pi p); \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right) \mid k, p, n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Постройте график $y = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \sin \frac{x}{2}$.

$$y = \begin{cases} \sin x, & \cos \frac{x}{2} \geq 0 \\ -\sin x, & \cos \frac{x}{2} < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 5

1. Вычислите $\operatorname{tg} 2\beta$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, если $\sin \beta = -\frac{60}{61}$ при $\beta \in [1,5\pi; 2\pi]$.

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(-\frac{60}{61}\right)^2} = \sqrt{\frac{(61+60)(61-60)}{61^2}} = \frac{11}{61},$$

$$\text{тогда } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}.$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta};$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \left(-\frac{60}{11}\right)}{1 - \left(-\frac{60}{11}\right)^2} = \frac{120 \cdot 11}{3600 - 121} = \boxed{\frac{1320}{3479}}.$$

$$\text{Так как } \frac{3\pi}{2} \leq \beta \leq 2\pi, \text{ то } \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\beta}{2} \leq \pi,$$

$$\text{значит, } \cos \frac{\beta}{2} < 0, \sin \frac{\beta}{2} > 0.$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{11}{61}}{2}} = -\frac{6}{61}\sqrt{61};$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}}; \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{11}{61}}{2}} = \frac{5}{61}\sqrt{61}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \boxed{-\frac{5}{6}}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Упростите } & \frac{4 \sin^2(45^\circ + \alpha) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{4 \sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \cos^2(45^\circ + \alpha)} = \\ & = \frac{2(1 - \cos(90^\circ + 2\alpha)) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{4 \sin 10^\circ \cdot \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ + \alpha)} = \\ & = \frac{2(1 + \sin 2\alpha) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 1 - 2 \cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ \cdot \sin(90^\circ + 2\alpha)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin 10^\circ + 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 10^\circ - 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cdot \cos 2\alpha} = \\
 &= \frac{2 \sin 2\alpha \cdot \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cdot \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.
 \end{aligned}$$

3. Докажите:

$$1) \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}.$$

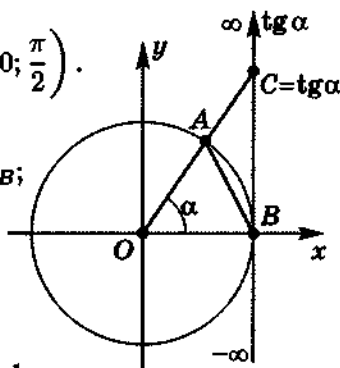
$$\begin{aligned}
 L &= \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \\
 &= 2 \sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \\
 &= \frac{2 \cos 36^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \\ \Pi &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Из чертежа следует, что

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\triangle OCB};$$



Пусть $OA = R$;

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot CB = \frac{1}{2} OB^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$S_{\text{сект. } AOB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha;$$

$$\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha < \frac{1}{2} R^2 \alpha < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

4. Решите уравнения:

1) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$.

$$\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = \cos 3x; \quad \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) = 0;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x \cdot \sin x = 0; \quad \begin{cases} x = \pi k \\ 2x = \pi n \end{cases}; \quad x = \frac{\pi}{2}n.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2}n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) $3 \cos 2x + 4 \sin 2x + 5 = \sin^2 x$.

$$3 \cos 2x + 4 \sin 2x + 5 = \sin^2 x;$$

$$3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 8 \sin x \cdot \cos x + 5 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - \sin^2 x = 0;$$

$$8 \cos^2 x + 8 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x + 8 = 0; \quad \operatorname{tg} x = -4 \pm \sqrt{8} = -4 \pm 2\sqrt{2};$$

$$x = \operatorname{arctg}(-4 \pm 2\sqrt{2}) + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \{ \operatorname{arctg}(-4 \pm 2\sqrt{2}) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

$$3) \arccos x = \operatorname{arctg} x. \quad \begin{cases} \arccos x \in [0; \pi] \\ \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases},$$

т. е. углы в левой и правой части располагаются в первой четверти, и косинус этих углов положителен.

$$\text{Так как } \cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \text{ то } x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}};$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad x^4 + x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \notin [0; \infty); \quad x^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \in (0; 1] \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \notin (0; 1] \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

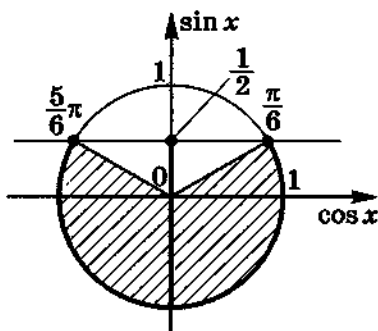
5. Решите неравенство¹ $\sqrt{5-2\sin x} \geq 6\sin x - 1$, если $x \in [0; \pi]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\sin x - 1 \geq 0 \\ 5 - 2\sin x \geq 36\sin^2 x - 12\sin x + 1; \\ 6\sin x < 1 \\ 5 - 2\sin x \geq 0 \end{array} \right.$$

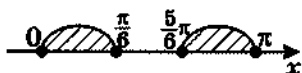
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x \geq \frac{1}{6} \\ 36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \leq 0; \\ \sin x < \frac{1}{6} \\ \sin x \leq 2,5 \end{array} \right.$$

$$\sin x = t; \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{36} = \frac{5 \pm 13}{36};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{2}{9} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График функции } y = 36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \text{ на } [0; \pi] \end{array} \right. \quad \sin x \leq \frac{1}{2};$$



Учитывая, что $x \in [0; \pi]$, получим



Ответ: $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

¹ Более подробно см. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. СПб.: «Петроглиф», 2008.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0,75 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0,75 \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} & \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\left[\begin{cases} x - y = 2\pi k & \textcircled{1} + \textcircled{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n & \textcircled{2} - \textcircled{1} \\ x - y = 2\pi k & \textcircled{1} + \textcircled{2}; \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n & \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{cases} \right];$$

$$\left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(n + k) \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(n - k) \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi(n + k) \\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k) \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}. \right.$$

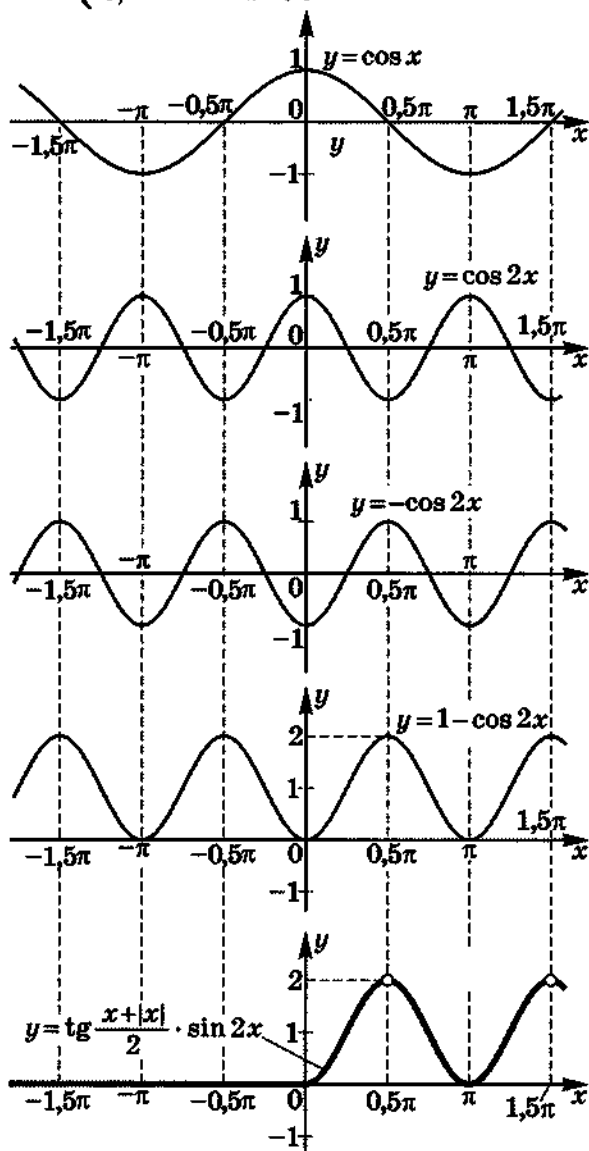
$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + \pi(n + k); \frac{\pi}{3} + \pi(n - k) \right); \left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{3} + \pi(n - k) \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Постройте график $y = \operatorname{tg} \frac{x + |x|}{2} \cdot \sin 2x$.

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 2 \sin^2 x, & x \geq 0 \text{ при } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 1 - \cos 2x, & x \geq 0 \text{ при } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Решение карточки 6

1. Вычислите
- $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ =$

$$\begin{aligned}
 &= (\cos 24^\circ - \cos 84^\circ) + (\cos 48^\circ - \cos 12^\circ) = \\
 &= -2 \sin 54^\circ \cdot \sin(-30^\circ) - 2 \sin 30^\circ \cdot \sin 18^\circ = \\
 &= \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 2 \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \\
 &= \frac{2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \boxed{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

2. Найдите
- $\alpha + 2\beta$
- , если
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$
- ,
- $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$
- при
- $\alpha, \beta \in I$
- .

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \sqrt{10}, \text{ поэтому } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4 + 21}{28 - 3} = \frac{25}{25} = 1.$$

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ но } \begin{cases} 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \left[\begin{array}{l} \text{так как } \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то} \\ \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}, \\ \text{т. е. } \beta < \frac{\pi}{4}. \end{array} \right]$$

значит, $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$, и $0 < \alpha + 2\beta < \pi$.

При $k = 0$ $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$; при $k = 1$ $\alpha + 2\beta = \frac{5\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Это все возможные значения $\alpha + 2\beta \in (0; 1,5\pi)$.

Ответ: $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

3. Упростите $A(\alpha) = \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^4 \alpha}$.

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha} = \\ &= \frac{4 \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{4 - 4 \sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{4 \sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

4. Докажите $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} < 2$ для $\forall \alpha \in D(H)$.

По условию $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$

(условие существования $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ $\alpha \neq 2\pi n + \pi$).

5.9

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} < 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} < 2 \Leftrightarrow$$

5.10

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} < 2 \Leftrightarrow \left[\text{при } \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0 \text{ и } \alpha \neq 2\pi n + \pi \right]$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} < 2 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos \alpha < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 1 \\ \alpha \neq \pi k \end{cases} \text{ — истина, что и требовалось доказать.}$$

5. Решите уравнения:

1) $39 + 7 \sin^2 x + 12 \sin 2x = 33 \cos x + 44 \sin x$.

$$\begin{aligned} 30 + 9 \cos^2 x + 9 \sin^2 x + 7 \sin^2 x + 24 \sin x \cdot \cos x = \\ = 11(4 \sin x + 3 \cos x); \end{aligned}$$

$$30 + (4 \sin x + 3 \cos x)^2 = 11(4 \sin x + 3 \cos x).$$

Учтем, что $a \sin x + b \cos x =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi_0) \in [-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}],$$

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Тогда $4 \sin x + 3 \cos x = 5 \sin(x + \varphi_0) \in [-5; 5]$.

Обозначим $t = 4 \sin x + 3 \cos x$, тогда

$$t^2 - 11t + 30 = 0; \quad \begin{cases} t = 5 \\ t = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4 \sin x + 3 \cos x = 5 \\ 4 \sin x + 3 \cos x = 6 \notin E(y = 4 \sin x + 3 \cos x); \end{cases}$$

$$4 \sin x + 3 \cos x = 5; \quad \frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1;$$

$$\begin{cases} \frac{3}{5} = \cos \varphi_0 \\ \frac{4}{5} = \sin \varphi_0 \end{cases}; \quad \varphi_0 = \arccos \frac{3}{5} \quad (\varphi_0 \in I);$$

$$\cos \varphi_0 \cdot \cos x + \sin \varphi_0 \cdot \sin x = 1;$$

$$\cos(x - \varphi_0) = 1; \quad x - \varphi_0 = 2\pi k.$$

$$\text{Ответ: } x = \arccos \frac{3}{5} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}.$$

$$\text{а) } x \neq \pi k; \quad \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{\sin x} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{2 \sin x} = \frac{1}{8}; \quad \frac{\sin 4x \cdot \cos 4x}{4 \sin x} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{\sin 8x}{8 \sin x} = \frac{1}{8}; \quad \sin 8x - \sin x = 0;$$

$$2 \sin 3,5x \cdot \cos 4,5x = 0;$$

$$\begin{cases} 3,5x = \pi k \\ 4,5x = \pi t + \frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{7}k & k \not\equiv 7 \\ x = \frac{2\pi}{9}t + \frac{\pi}{9} & (2t+1) \not\equiv 9 \end{cases}.$$

$$6) x = \pi k; \quad \cos \pi k \cdot \cos 2\pi k \cdot \cos 4\pi k = \frac{1}{8};$$

$\cos \pi k = \frac{1}{8}$ — ложно, т. е. $x = \pi k$ корнем уравнения не является.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{7}k; \frac{2\pi}{9}t + \frac{\pi}{9} \mid k, t \in \mathbb{Z}, k \not\equiv 7, (2t+1) \not\equiv 9 \right\}.$$

$$3) \arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi}{2}x.$$

Выясним, чему равно $D(Y)$.

$$|x^2 - 2x + 2| \leq 1; \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 \geq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \leq 0; \\ x^2 - 2x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2 \leq 0; \\ \forall x \end{cases}; \quad x = 1.$$

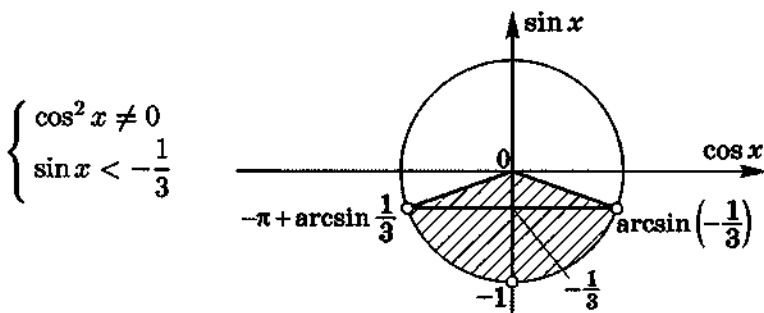
$$\text{Проверим: } \arcsin(1 - 2 + 2) = \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ — истинно.}$$

Ответ: $x = 1$.

6. Решите неравенство $3 \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^2 x < -1$.

$$3 \cos^2 x \cdot \sin x + \cos^2 x < 0; \quad \cos^2 x (3 \sin x + 1) < 0;$$



$$\text{Ответ: } \left\{ \left(-\pi + \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right); \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 2 \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 18 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} z = \pi - (x + y) \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} [\pi - (x + y)] = 2; \\ 9 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \end{cases} \quad \begin{cases} z = \pi - (x + y) \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x + y) = -2; \\ 9 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \pi - (x + y) \\ \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = -2; \\ 9 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 9 \operatorname{tg} x)}{1 - 9 \operatorname{tg}^2 x} = -2; \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{4} \quad \left(\operatorname{tg}^2 x \neq \frac{1}{9} \right);$$

$$\left[\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} y = \frac{9}{2} \\ \operatorname{tg} z = 4 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} y = -\frac{9}{2} \\ \operatorname{tg} z = -4 \end{cases} \right];$$

$$\left[\begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{9}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} 4 + \pi t \end{pmatrix} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi p; \operatorname{arctg} \left(-\frac{9}{2} \right) + \pi m; \operatorname{arctg}(-4) + \pi l \end{pmatrix} \right].$$

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{9}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} 4 + \pi t \end{pmatrix}; \right.$
 $\left. \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi p; \operatorname{arctg} \left(-\frac{9}{2} \right) + \pi m; \operatorname{arctg}(-4) + \pi l \end{pmatrix} \right\}$
 $|k, t, n, p, m, l \in \mathbb{Z} \}.$

8. Постройте график

$$y = \frac{2 \sin^2(45^\circ + x) \cdot \sin 10^\circ - 1 + 4 \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{4 \sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + x) \cdot \cos^2(45^\circ + x)}.$$

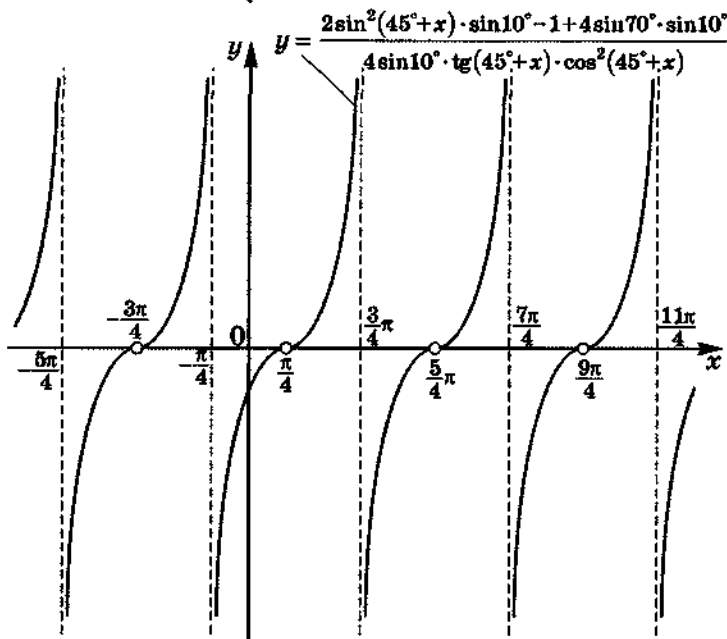
$$y = \frac{[1 - \cos(90^\circ + 2x)] \cdot \sin 10^\circ - 1 + 2 [\cos 60^\circ - \cos 80^\circ]}{4 \sin 10^\circ \cdot \sin(45^\circ + x) \cdot \cos(45^\circ + x)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ + \sin 2x \cdot \sin 10^\circ - 1 + 1 - 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cdot \sin(90^\circ + 2x)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ \cdot (\sin 2x - 1)}{2 \sin 10^\circ \cdot \cos 2x} = -\frac{1 (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x)}{2 (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом,
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}.$$



Решение карточки 7

1. Вычислите $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} + 1 + \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{1 + \cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} + 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}} = \\
 &= \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right)^2 + 1 - \cos^2 \frac{\pi}{6} + \left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right)^2}{1 - \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \\
 &= \frac{1 - 2 \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + 1 + 2 \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = \\
 &= \frac{3 + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{3 + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \boxed{15}.
 \end{aligned}$$

2. Докажите:

1) $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$, где $\alpha, \beta \in I$.

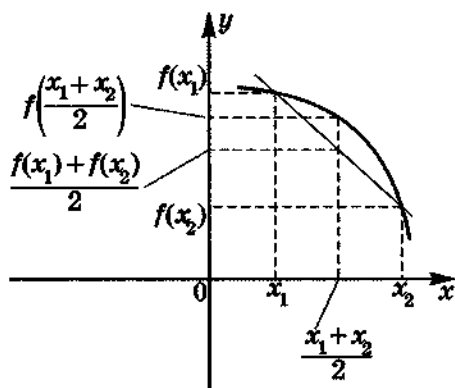
$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \geq 0 - \text{истинно, так как}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \geq 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1 \quad \forall \alpha, \beta.$$

Примечание. Из определения выпуклости функции вверх на множестве M (функция называется выпуклой вверх, если $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для $\forall x_1, x_2 \in M$) следует, что мы доказали выпуклость $y = \cos x$ вверх на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, что графически очевидно.



$$2) \operatorname{tg} \left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13} \right) = -\frac{119}{120}.$$

$$\text{Обозначим } \alpha = \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \beta = \arcsin \frac{12}{13}.$$

$$L = \operatorname{tg}(2\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}} \right) = \frac{\sin \left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}} \right)}{\cos \left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{26}} \right)^2}}{\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{26}}}{\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{1}{5};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{12}{13} \right) = \frac{\sin \left(\arcsin \frac{12}{13} \right)}{\cos \left(\arcsin \frac{12}{13} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}.$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) = \frac{\frac{5}{12} - \frac{12}{5}}{1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{\frac{25-144}{60}}{2} = -\frac{119}{120};$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{119}{120} \\ \Pi &= -\frac{119}{120} \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

3. Найдите $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, если $\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65} \\ \cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65} \end{cases}$

при $2,5\pi < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{21}{65} \\ 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{27}{65} \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$.

Учитывая, что $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$, $\pi < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$, получаем

$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} < 0$ и $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} < 0$.

Значит, $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}}$;

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\frac{7}{9}}{-\sqrt{1 + \frac{49}{81}}} = -\frac{7}{\sqrt{130}} = \boxed{-\frac{7}{130}\sqrt{130}}.$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}};$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{49}{81}}} = -\frac{9}{\sqrt{130}} = \boxed{-\frac{9}{130}\sqrt{130}}.$$

4. Решите уравнения:

$$1) \frac{\cos^2 x (1 + \operatorname{ctg} x)}{\sin x - \cos x} = 3 \cos x.$$

$$D(Y): x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k | k \in \mathbb{Z} \text{ и } \sin x \neq 0; \quad x \neq \pi n | n \in \mathbb{Z}.$$

$$a) \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z}, \text{ тогда } \frac{\pi}{2} + \pi n \in D(Y);$$

$$b) \operatorname{ctg} x \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 3; \quad \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} = 3.$$

$$\text{Обозначим } \operatorname{ctg} x = t;$$

$$t(1+t) = 3(1-t); \quad t^2 + 4t - 3 = 0; \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7};$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arccotg}(-2 \pm \sqrt{7}) + \pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arccotg}(-2 \pm \sqrt{7}) + \pi k | k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) (1 + 2 \cos 2x) \cdot \sin x + (1 - 2 \cos 2x) \cdot \cos x = 0$$

$$\text{при } \pi < \left| 2x - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{7\pi}{3}.$$

Так как $\cos x = 0$ не является решением уравнения, можно разделить обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x}; \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\text{Обозначим } t = \operatorname{tg} x. \text{ Тогда } t = \frac{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - 1}{1 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}};$$

$$t = \frac{2 - 2t^2 - 1 - t^2}{1 + t^2 + 2 - 2t^2}; \quad t \neq \pm \sqrt{3};$$

$$t(3 - t^2) = 1 - 3t^2; \quad t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0;$$

$$(t+1)(t^2 - t + 1) - 3t(t+1) = 0; \quad (t+1)(t^2 - 4t + 1) = 0;$$

$$a) t = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k | k \in \mathbb{Z};$$

$$b) t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}; \quad \operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}; \\ x = \operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + \pi n | n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что $\pm\sqrt{3} \notin \{-1; 2 \pm \sqrt{3}\}$.

Расшифруем условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{3} \\ 2x - \frac{\pi}{2} \geq -\frac{7\pi}{3} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{2} > \pi \\ 2x - \frac{\pi}{2} < -\pi \end{array} \right.$$

$$M = \left[-\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{17\pi}{12}\right].$$

$$k = -1: (x_1)_1 \notin M$$

$$a) x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k \notin M: \quad k = 0: (x_1)_2 \notin M.$$

$$k = 1: (x_1)_3 \notin M$$

$$b) x_2 = \arctg(2 - \sqrt{3}) + \pi n. \text{ Вычислим } \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Проверим принадлежность $x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi n \in M$:

$$n = -1: (x_2)_1 = -\frac{11\pi}{12} \in M$$

$$n = 0: (x_2)_2 = \frac{\pi}{12} \notin M$$

$$n = 1: (x_2)_3 = \frac{13\pi}{12} \in M$$

$$\begin{aligned} \text{в) Аналогично: } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Проверим $x_3 = \frac{5\pi}{12} + \pi t \in M$ ($t \in \mathbb{Z}$):

$$t = -1: (x_3)_1 = -\frac{7\pi}{12} \in M$$

$$t = 0: (x_3)_2 = \frac{5\pi}{12} \notin M$$

$$t = 1: (x_3)_3 = \frac{17\pi}{12} \in M$$

Ответ: $\left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$.

$$3) \sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}, \quad D(y): x \neq \frac{\pi}{2}k.$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot \left[\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos x + \right. \\ \left. + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x + \cos^4 x) - 1 \right] = 0;$$

$$a) \sin x - \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \in D(y).$$

$$b) \sin x \cdot \cos x \cdot \left(\sin^4 x + \cos^4 x + \right. \\ \left. + \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cdot \cos^2 x \right) = 1; \\ \sin x \cdot \cos x \cdot \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x + \right. \\ \left. + \sin x \cdot \cos x \right] = 1.$$

Обозначим $\sin x \cdot \cos x = t$. Тогда

$$t(1 - t^2 + t) = 1; \quad t^3 - t^2 - t + 1 = 0;$$

$$t^2(t - 1) - (t - 1) = 0; \quad (t - 1)^2(t + 1) = 0;$$

$$\begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \sin x \cdot \cos x = 1 \\ \sin x \cdot \cos x = -1 \end{bmatrix};$$

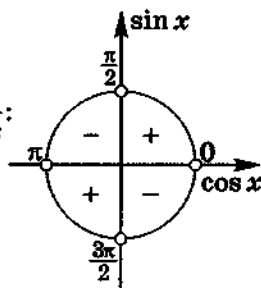
$$\begin{bmatrix} \sin 2x = 2 \notin E(\sin x) \\ \sin 2x = -2 \notin E(\sin x) \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\left\{x = \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Решите неравенство $\frac{\sin 3x \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \leq 0$ на $[0; 2\pi]$.

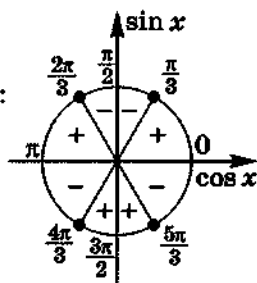
а) $\sin 2x \neq 0: x \neq \frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Чередование знаков для $y = \frac{1}{\sin 2x}$:



б) $\sin 3x = 0: x = \frac{\pi}{3}n \mid n \in \mathbb{Z}$.

Чередование знаков для $y = \sin 3x$:

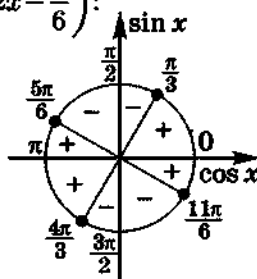


в) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi m; \quad 2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi m \mid m \in \mathbb{Z};$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + \pi m; \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}m.$$

Чередование знаков для $y = \cos \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$:



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \frac{1}{\sin 2x}$	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	
$y = \sin 3x$	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	
$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	
$y = \frac{\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}$	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	+	

Итак, $\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x} \leq 0$, если

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right].$$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2 \sin y \cdot \sin(x+y) = \cos x \end{cases}$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ \cos(y-x-y) - \cos(x+2y) = \cos x \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \\ \cos(x+2y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y + \pi k\right) + \sin 2y = \sin 2\left(-2y + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \\ x \neq \pi n \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2y + \sin 2y = \sin(\pi - 4y) \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\sin 2y}{\cos 2y} + \sin 2y = \sin 4y \\ x = -2y + \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{\sin 2y}{\cos 2y} (1 + \cos 2y - 2 \cos^2 2y) = 0 \\ x \neq \pi n \\ x = -2y + \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \cos 2y = 1 \\ \cos 2y = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ x \neq \pi n \\ x = -2y + \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = \frac{\pi}{2}p \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t \\ x \neq \pi n \\ x = -2y + \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}; \begin{cases} y = \frac{\pi}{2}p \\ x = \frac{\pi}{2} + (k-p)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi t \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + (k-2t)\pi \end{cases} \in D(C) \end{cases}.$$

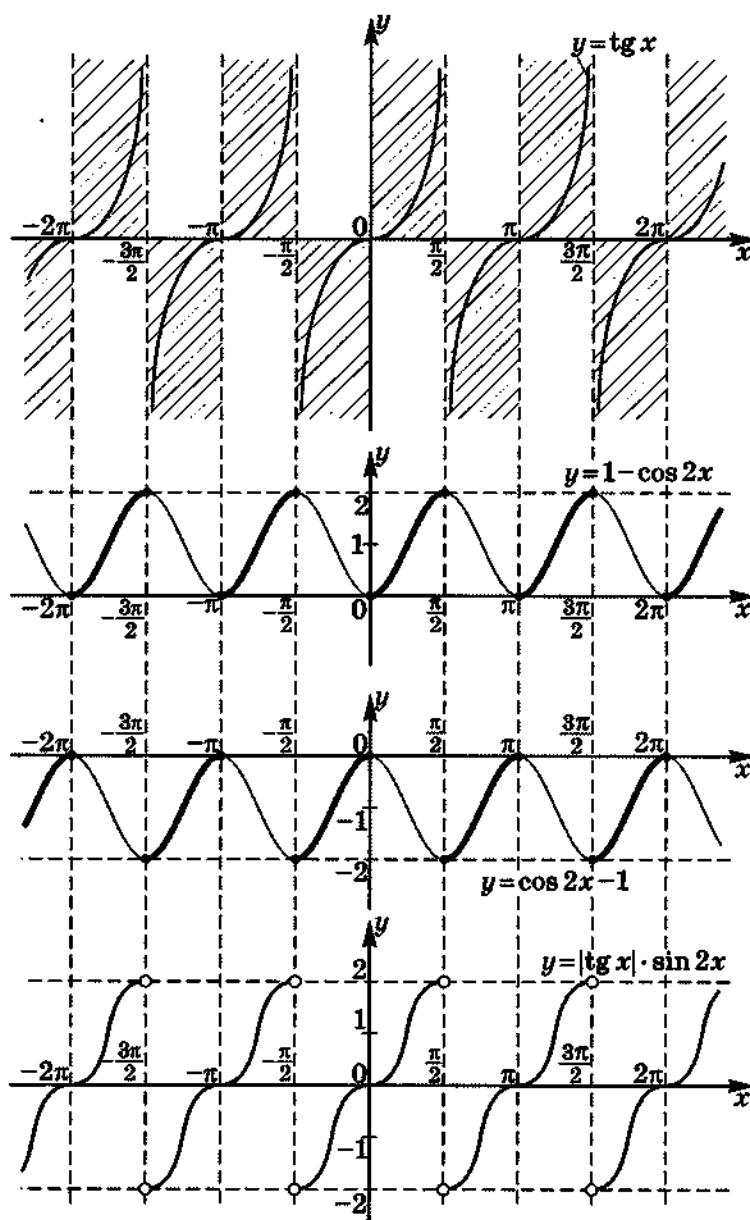
$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + (k-p)\pi; \frac{\pi}{2}p \right); \left(\pm \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + (k-2t)\pi; \pm \frac{\pi}{3} + \pi t \right) \mid p, t, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Постройте график $y = |\operatorname{tg} x| \cdot \sin 2x$.

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin 2x, & \operatorname{tg} x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x, & \operatorname{tg} x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 2 \sin^2 x, & \operatorname{tg} x \geq 0 \\ -2 \sin^2 x, & \operatorname{tg} x < 0 \end{cases};$$

$$y = \begin{cases} 1 - \cos 2x, & \operatorname{tg} x \geq 0 \\ \cos 2x - 1, & \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}.$$



Решение карточки 8

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\
 & = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha) = \\
 & = \frac{\cos \alpha \cdot \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)} = \\
 & = \frac{\cos \alpha [\cos(\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ) + \cos(\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ)]}{\sin \alpha [\cos(\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ)]} = \\
 & = \frac{\cos \alpha (\cos 120^\circ + \cos 2\alpha)}{\sin \alpha (\cos 120^\circ - \cos 2\alpha)} = \frac{\cos \alpha \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right)}{\sin \alpha \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2} \right)} = \\
 & = \frac{\cos \alpha [2(2 \cos^2 \alpha - 1) - 1]}{\sin \alpha [2(2 \cos^2 \alpha - 1) + 1]} = \frac{\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)}{\sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)} = \\
 & = \frac{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot [4(1 - \sin^2 \alpha) - 1]} = \frac{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} = \\
 & = \frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.
 \end{aligned}$$

2. Вычислите $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} =$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\
 & = \frac{\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\
 & = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \boxed{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

3. Докажите $\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$.

$$\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ \Leftrightarrow \cos^2 36^\circ > \sin 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 72^\circ > 2 \sin 36^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 18^\circ > 2 \sin 6^\circ \cdot \cos 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 6^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ > 2 \sin 6^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 6^\circ.$$

С другой стороны, $\sin 9^\circ > \sin 6^\circ$, $\cos 9^\circ > \cos 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ > 2 \sin 6^\circ \cdot \cos 30^\circ;$$

$$1 > \cos 6^\circ, \quad 2 \sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ > 2 \sin 6^\circ \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ > 2 \sin 6^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 6^\circ -$$

верное утверждение.

Значит, предположение о выполнении неравенства

$\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$ также истинно, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

$$1) \operatorname{tg}(x - 15^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\sin(x - 15^\circ) \cdot \cos(x + 15^\circ)}{\cos(x - 15^\circ) \cdot \sin(x + 15^\circ)} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{2}}{\sin 2x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; \quad 3 \sin 2x - 1,5 = \sin 2x + \frac{1}{2};$$

$$\sin 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \arcsin \frac{x}{2} + \arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} - \arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\sin \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right);$$

$$\frac{x}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \left(\arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(\arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right);$$

$\arccos m \in [0; \pi]$, значит $\sin(\arccos m) \geq 0$;

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \sin \left(\arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \sqrt{1 - \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2};$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \left(\arccos \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \sqrt{1 - \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{1 - \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}; \quad 1 - \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Проверим:

$$\text{а) } x = 0; \quad \arcsin 0 + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6};$$

$$0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \text{истинно.}$$

$$\text{б) } x = -\sqrt{3}; \quad \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6};$$

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \text{ложно.}$$

Ответ: $x = 0$.

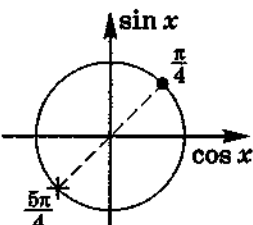
$$3) \quad 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \quad D(Y): x \neq \frac{\pi}{2}k;$$

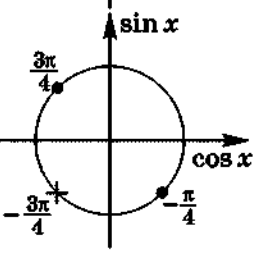
$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x};$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1;$$

$$\sin 2x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1;$$

$$\left[\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ \sin 2x = -1 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases} \right]; \quad \left[\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi t \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi p \end{cases} \right];$$

$$\left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \right. \quad \begin{array}{c} \text{sin } x \\ \text{cos } x \end{array} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$


$$\left[\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi t \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi p \end{cases} \right. \quad \begin{array}{c} \text{sin } x \\ \text{cos } x \end{array} \quad \emptyset$$


Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

5. Решите неравенство $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x > \sin 4x.$

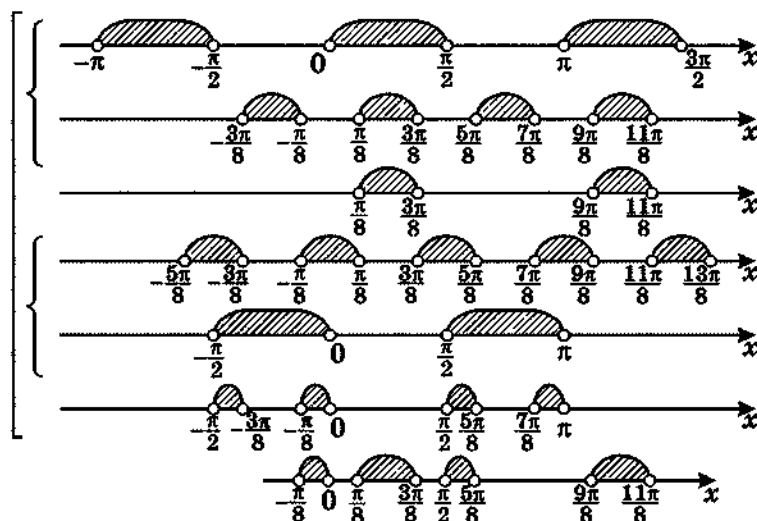
$$2 \sin 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) > \sin 4x;$$

$$2 \sin 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) > 0;$$

$$2 \sin 2x \cdot (-\cos 4x) > 0; \quad \sin 2x \cdot \cos 4x < 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2x > 0 \\ \cos 4x < 0 \\ \sin 2x < 0 \\ \cos 4x > 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi + 2\pi k > 2x > 2\pi k \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n > 4x > \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2\pi + 2\pi t > 2x > \pi + 2\pi t \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi p > 4x > -\frac{\pi}{2} + 2\pi p \end{array} \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k \\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n > x > \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \\ \pi + \pi t > x > \frac{\pi}{2} + \pi t \\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}p > x > -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}p \end{array} \right\};$$



а) $\left(\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right)$;

б) $\left(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi t; \frac{5\pi}{8} + \pi t\right)$.

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right); \left(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \pi n\right); \left(\frac{\pi}{2} + \pi t; \frac{5\pi}{8} + \pi t\right) \mid k, n, t \in \mathbb{Z} \right\}$.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin^2 y + \sin y + \frac{1}{4} \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} - \sqrt{3} \cos y + \cos^2 y \end{cases} \quad \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$1 = 1 + 1 + \sin y - \sqrt{3} \cos y; \quad \sin y - \sqrt{3} \cos y = -1;$$

$$\frac{1}{2} \sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y = -\frac{1}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad y = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} \sin y = \sin x - \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin^2 y = \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} \\ \cos^2 y = \frac{3}{4} - \sqrt{3} \cos x + \cos^2 x \end{cases};$$

$$1 = 1 + 1 - (\sin x + \sqrt{3} \cos x);$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Значит,
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

Проведем проверку при $k = 0, \quad n = 0$.

а) $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{— истинно.}$$

$$б) \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} + \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$в) \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} + \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \emptyset.$$

$$г) \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \left(-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \\ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{— истинно.}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right); \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Постройте график $y = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sin x + \cos x$.

$$1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2;$$

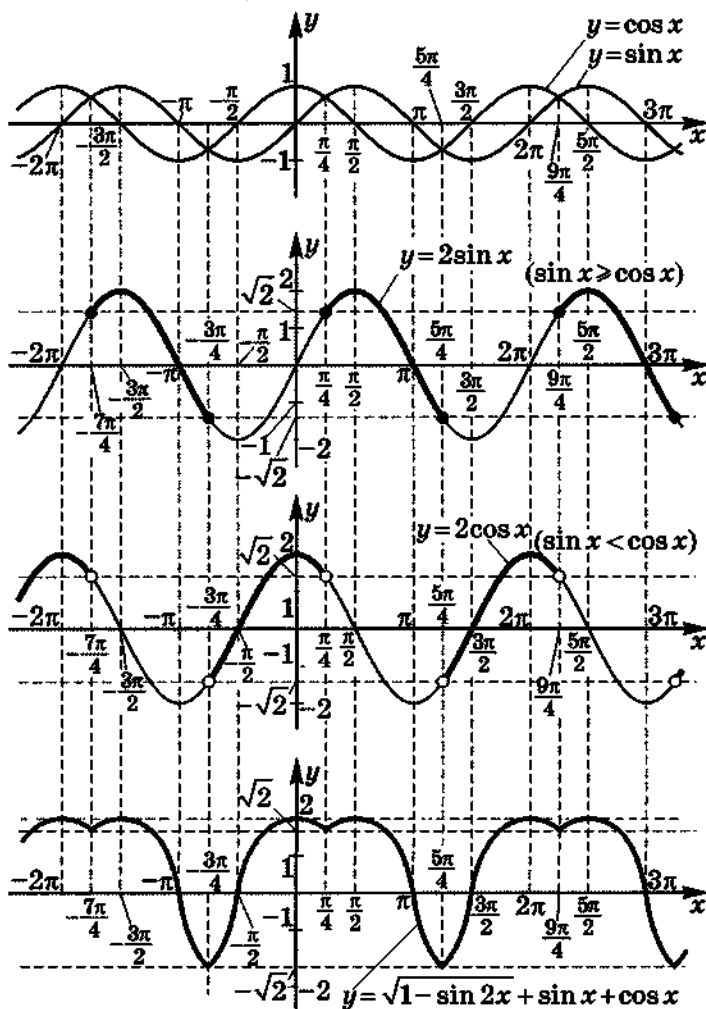
$$y = |\sin x - \cos x| + \sin x + \cos x;$$

$$а) \begin{cases} \sin x \geq \cos x \\ y = 2 \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \geq x \geq \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \\ y = 2 \sin x \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} \sin x < \cos x \\ y = 2 \cos x \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \\ y = 2 \cos x \end{cases};$$

$$\sin x \geq \cos x \text{ на } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \right];$$

$$\sin x < \cos x \text{ на } \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right).$$



Решение карточки 9

1. Упростите $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$.

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } & \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \\ & = \frac{\cos^3 \alpha - 4 \cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \\ & = \frac{3 \cos \alpha - 3 \cos^3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha - 3 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \\ & = 3 - 3 \cos^2 \alpha + 3 - 3 \sin^2 \alpha = 6 - 3(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 6 - 3 = 3. \end{aligned}$$

2. Докажите тождества:

1) $\frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.$

$$\begin{aligned} L &= \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \\ &= \frac{3 + 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \cos^2 2\alpha - 1}{3 - 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \cos^2 2\alpha - 1} = \\ &= \frac{8 \cos^2 \alpha - 1 + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1}{-8 \cos^2 \alpha + 6 + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2} = \\ &= \frac{8 \cos^2 \alpha - 1 + 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 2 - 1}{-8 \cos^2 \alpha + 6 + 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 2} = \\ &= \frac{8 \cos^4 \alpha}{8(1 - \cos^2 \alpha) + 8 \cos^2 \alpha(\cos^2 \alpha - 1)} = \\ &= \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \operatorname{ctg}^4 \alpha \\ \Pi &= \operatorname{ctg}^4 \alpha \end{aligned} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

$$2) \operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5.$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ; \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{5} \right) = -\cos \frac{3\pi}{5};$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0; \quad 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 + 4\cos^3 \frac{\pi}{5} - 3\cos \frac{\pi}{5} = 0;$$

$$4\cos^3 \frac{\pi}{5} + 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 3\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0.$$

Обозначим $\cos \frac{\pi}{5} = t$:

$$\begin{array}{r} -4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 \mid t + 1 \\ \underline{4t^3 + 4t^2} \\ -2t^2 - 3t - 1 \\ \underline{-2t^2 - 2t} \\ -t - 1 \\ \underline{-t - 1} \end{array}$$

$$(t + 1)(4t^2 - 2t - 1) = 0;$$

$$\cos \frac{\pi}{5} \neq -1 \Rightarrow 4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0;$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{5} \right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}; \quad \cos \frac{\pi}{5} > 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4};$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2 - 1 = \frac{5 + 1 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4};$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8};$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{8} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{5}}{\cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}};$$

$$\cos^2 \frac{2\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8};$$

$$\sin^2 \frac{2\pi}{5} = 1 - \cos^2 \frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{25 - 5}{9 - 5} = \frac{20}{4} = 5,$$

что и требовалось доказать.

3. Решите уравнения:

$$1) \frac{1 + 2 \cos 2x}{2 \cos x} = \operatorname{tg}^2 x - 3, \text{ если } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$D(Y): \cos x \neq 0;$$

$$\frac{1 + 2(2 \cos^2 x - 1)}{2 \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - 3;$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x; \quad \cos x \cdot (4 \cos^2 x - 1) = 2(1 - 4 \cos^2 x);$$

$$(4 \cos^2 x - 1)(\cos x + 2) = 0; \quad (2 + 2 \cos 2x - 1)(\cos x + 2) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = -2 \notin E(\cos x) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2 \sin(80^\circ + 2x).$$

$$\operatorname{tg} 3(x + 40^\circ) - \operatorname{tg}(180^\circ - (40^\circ + x)) = 2 \sin 2(x + 40^\circ);$$

$$\operatorname{tg} 3(x + 40^\circ) + \operatorname{tg}(40^\circ + x) = 2 \sin 2(x + 40^\circ).$$

$$\text{Обозначим } x + 40^\circ = z. \text{ Тогда } \operatorname{tg} 3z + \operatorname{tg} z = 2 \sin 2z;$$

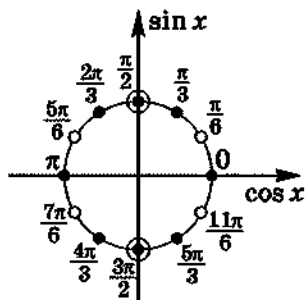
$$\frac{\sin 4z}{\cos 3z \cdot \cos z} - 2 \sin 2z = 0;$$

$$\frac{2 \sin 2z \cdot \cos 2z}{\cos 3z \cdot \cos z} - 2 \sin 2z = 0;$$

$$\frac{2 \sin 2z}{\cos 3z \cdot \cos z} (\cos 2z - \cos 3z \cdot \cos z) = 0; \quad \begin{cases} \cos z \neq 0 \\ \cos 3z \neq 0 \end{cases};$$

$$\sin 2z(\cos 2z - \cos 4z) = 0; \quad 2 \sin 2z \cdot \sin 3z \cdot \sin z = 0;$$

$$\begin{cases} z = \pi k \\ 2z = \pi t; \\ 3z = \pi n \end{cases} \quad \begin{cases} z \neq \frac{\pi}{2} + \pi p \\ z \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} m \end{cases};$$



$$\text{Ответ: } \left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Докажите $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, если $A + B + C = 180^\circ$.

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &= \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right] \leq \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) \leq \frac{1}{8}; \end{aligned}$$

$$\cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{\pi - A}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} > 0;$$

$$\cos \frac{B-C}{2} \leq 1. \text{ Прибавим к обеим частям } \left(-\sin \frac{A}{2} \right):$$

$$\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \leq 1 - \sin \frac{A}{2}.$$

Обозначим $\sin \frac{A}{2} = x$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x(1-x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x) = -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8}; \end{aligned}$$

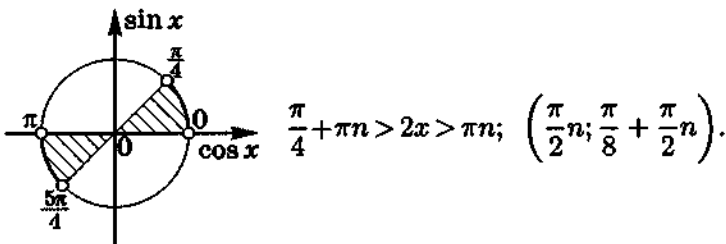
$f(x) \leq \frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} = f(x)$ — наибольшее при $x = \frac{1}{2}$, значит

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

5. Решите неравенства:

1) $\sin 4x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 2x > 1.$

$$\frac{\sin 4x \cdot \sin 2x + \cos 4x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} > 1; \quad \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1; \quad \operatorname{ctg} 2x > 1;$$



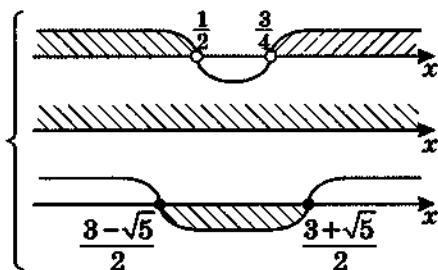
Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

2) $\frac{\arccos(x^2 - 3x + 2)}{8x^2 - 10x + 3} > 0.$

$$\arccos(x^2 - 3x + 2) \in [0; \pi];$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq -1; \\ x^2 - 3x + 2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 10x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x + 3 \geq 0; \\ x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right].$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases}$.

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = \cos(x - y); \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k \\ \cos^2(y + 2\pi k) = \sin(y + 2\pi k) \cdot \sin y \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi k \\ \cos^2 y - \sin^2 y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y + 2\pi k \\ \cos 2y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n + 4k); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

7. Постройте график $y = 2|\sin x| \cdot \cos x + |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{ctg} x$.

а) $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} : y = \sin 2x + 1; \quad \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right);$

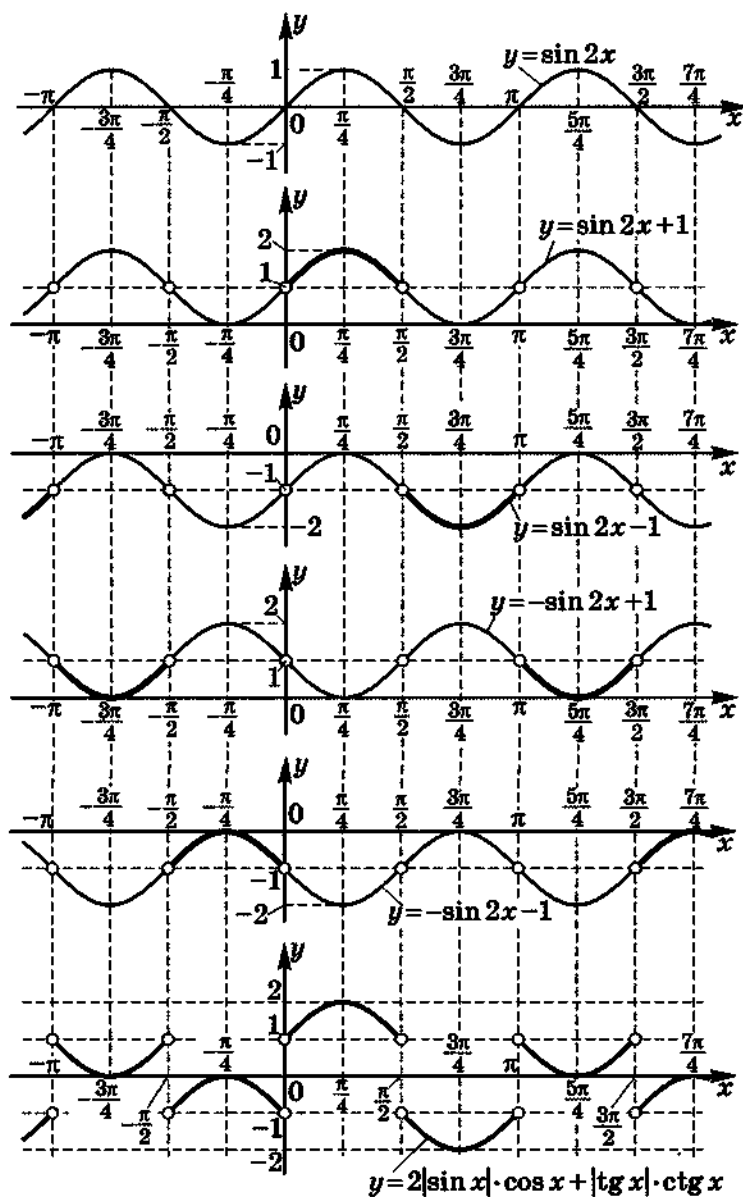
б) $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} : y = \sin 2x - 1; \quad \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right);$

в) $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} : y = -\sin 2x + 1; \quad \left(\pi + 2\pi t; \frac{3\pi}{2} + 2\pi t \right);$

г) $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} : y = -\sin 2x - 1; \quad \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi p; 2\pi + 2\pi p \right).$

$$(k, n, t, p \in \mathbb{Z})$$

Учтем, что $x \neq \frac{\pi}{2}k$.



Решение карточки 10

1. Упростите:

$$\begin{aligned}
 & 1) \operatorname{tg}(35^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) - \frac{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) - 1}{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) + 1}; \\
 & \operatorname{tg}(35^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) - \frac{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) - 1}{2 \cos(10^\circ + 2\alpha) + 1} = \\
 & = \frac{\sin(35^\circ + \alpha) \cdot \sin(25^\circ - \alpha)}{\cos(35^\circ + \alpha) \cdot \cos(25^\circ - \alpha)} - \frac{\cos(10^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{2}}{\cos(10^\circ + 2\alpha) + \frac{1}{2}} = \\
 & = \frac{\frac{1}{2} [\cos(35^\circ + \alpha - 25^\circ + \alpha) - \cos(35^\circ + \alpha + 25^\circ - \alpha)]}{\frac{1}{2} [\cos(35^\circ + \alpha + 25^\circ - \alpha) + \cos(35^\circ + \alpha - 25^\circ + \alpha)]} - \\
 & \quad - \frac{\cos(10^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{2}}{\cos(10^\circ + 2\alpha) + \frac{1}{2}} = \\
 & = \frac{\cos(10^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{2}}{\cos(10^\circ + 2\alpha) + \frac{1}{2}} - \frac{\cos(10^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{2}}{\cos(10^\circ + 2\alpha) + \frac{1}{2}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ) = \\
 & = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha + 60^\circ) \cdot \sin(\alpha - 60^\circ)}{\cos(\alpha + 60^\circ) \cdot \cos(\alpha - 60^\circ)} = \\
 & = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\cos(\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ)}{\cos(\alpha + 60^\circ + \alpha - 60^\circ) + \cos(\alpha + 60^\circ - \alpha + 60^\circ)} = \\
 & = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\cos 120^\circ - \cos 2\alpha}{\cos 120^\circ + \cos 2\alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2 \cos 2\alpha + 1}{2 \cos 2\alpha - 1} = \\
 & = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2(2 \cos^2 \alpha - 1) + 1}{2(2 \cos^2 \alpha - 1) - 1} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{4 \cos^2 \alpha - 1}{4 \cos^2 \alpha - 3} = \\
 & = -\frac{4 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = -\frac{4(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha - \sin \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = \\
 & = -\frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = -\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = -\operatorname{tg} 3\alpha.
 \end{aligned}$$

2. Докажите:

$$1) \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}.$$

$$\begin{aligned} L &= \sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \\ &= \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{7}}{2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{7}}{2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \right) \cdot \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} - \cos \frac{6\pi}{7} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{7} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{7} + \frac{1}{2} \cos \frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{7} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{64}, \end{aligned}$$

$$\text{так как } \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} =$$

$$= \frac{8 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{4 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{7}{64} \\ \Pi = \frac{7}{64} \end{array} \right| \Rightarrow L = \Pi.$$

- 2) $\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Доказательство проведем методом математической индукции.

- а) Пусть $n = 2$.

Докажем, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$;

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha (1 - 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} > 0, \end{aligned}$$

так как при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ $\operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$,

а значит, $0 < \operatorname{tg} \alpha < 1$, поэтому $\operatorname{tg} 2\alpha > 2 \operatorname{tg} \alpha$, и при $n = 2$ неравенство выполнено.

- б) Пусть неравенство выполнено при $n = k$,

т.е. $\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)}$.

Докажем, что неравенство выполняется при $n = k + 1$, т.е. $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1) \operatorname{tg} \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство: } \operatorname{tg}(k+1)\alpha &= \frac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} > \\ &> \frac{k \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(k+1) \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} > (k+1) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Так как по индуктивному предположению

$$\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg} \alpha \text{ при } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)},$$

$$\text{то } 0 < \operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \operatorname{tg} k\alpha < 1 \\ 0 < \operatorname{tg} \alpha < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 1.$$

Значит, $1 > 1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha > 0$,

т. е. $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1) \operatorname{tg} \alpha$.

Индуктивный переход доказан.

$$3) \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} > 1, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array} \right]; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad 1 > 1 - \text{ложно} \\ x = 2\pi n; \quad 1 > 1 - \text{ложно} \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ x \neq 2\pi n \end{array} \right. ; \quad \sqrt{\sin x} > 1 - \sqrt{\cos x} > 0;$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sin x > 1 - 2\sqrt{\cos x} + \cos x; \quad 2\sqrt{\cos x} > 1 + \cos x - \sin x > 0;$$

Так как $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ и

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac, \text{ то}$$

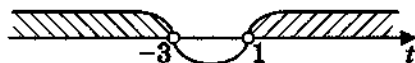
$$4\cos x > 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x - 2\sin x - 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$2 - 2(\cos x + \sin x) - 2\sin x \cdot \cos x < 0;$$

$$3 - 2(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)^2 < 0.$$

$$\text{Обозначим } t = \cos x + \sin x; \quad t^2 + 2t - 3 > 0;$$

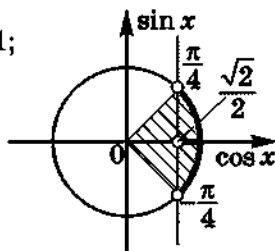
$$(t+3)(t-1) > 0;$$



$$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \not\subset (-\infty; -3) \Rightarrow \sin x + \cos x < -3 \quad x \in \emptyset;$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > 1;$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{\sqrt{2}}{2};$$



$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k > x - \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k > x > 2\pi k,$$

т. е. для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ утверждение $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$ верно.

Примечание. Есть более простое доказательство, которое требует догадки.

$$\cos x(1 - \cos^3 x) > 0 \quad \text{для } \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{т. е. } \cos x > \cos^4 x, \text{ тогда } \sqrt{\cos x} > \cos^2 x.$$

$$\text{Аналогично } \sin x(1 - \sin^3 x) > 0; \quad \sqrt{\sin x} > \sin^2 x.$$

Почленно сложив полученные неравенства, получаем:

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ что верно для}$$

$$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ что и требовалось доказать.}$$

3. Решите уравнения:

$$1) \cos \frac{4x}{3} = \cos^2 x.$$

$$\cos \frac{4x}{3} = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad 2 \cos \frac{4x}{3} = 1 + \cos 2x;$$

$$2 \left(2 \cos^2 \frac{2x}{3} - 1 \right) = 1 + 4 \cos^3 \frac{2x}{3} - 3 \cos \frac{2x}{3};$$

$$4 \cos^2 \frac{2x}{3} - 3 - \cos \frac{2x}{3} \cdot \left(4 \cos^2 \frac{2x}{3} - 3 \right) = 0;$$

$$\left(4 \cos^2 \frac{2x}{3} - 3 \right) \left(1 - \cos \frac{2x}{3} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{2x}{3} = 1 \\ \cos^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos \frac{2x}{3} = 1 \\ \frac{1 + \cos \frac{4x}{3}}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos \frac{2x}{3} = 1 \\ \cos \frac{4x}{3} = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} = 2\pi k \\ \frac{4x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3\pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ 3\pi k; \pm \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

2) $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$

Найдем $D(Y)$.

$\frac{2}{3\sqrt{x}} > 0, \sqrt{1-x} \geq 0$, значит

$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin \sqrt{1-x} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

С другой стороны, $\begin{cases} \left| \frac{2}{3\sqrt{x}} \right| \leq 1 \\ \left| \sqrt{1-x} \right| \leq 1 \end{cases};$

$\begin{cases} x \geq \frac{4}{9} \\ 1-x \leq 1 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}; \quad \text{Итак, } x \in \left[\frac{4}{9}; 1\right].$

$\sin \left(\underbrace{\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}}}_{\alpha} - \underbrace{\arcsin \sqrt{1-x}}_{\beta} \right) = \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right);$

$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3};$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha;$

$\sin \alpha = \frac{2}{3\sqrt{x}}; \quad \sin \beta = \sqrt{1-x};$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9x}}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - 1 + x} = \sqrt{x}.$$

$$\text{Получим: } \sin(\alpha - \beta) = \frac{2}{3\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{\frac{9x-4}{9x}}; \quad \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{9x-4};$$

$$x = 9x - 9x^2 + 4x - 4; \quad 9x^2 - 12x + 4 = 0;$$

$$(3x - 2)^2 = 0; \quad x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{4}{9}; 1\right].$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{3}.$$

4. Решите неравенство $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x > 0$.

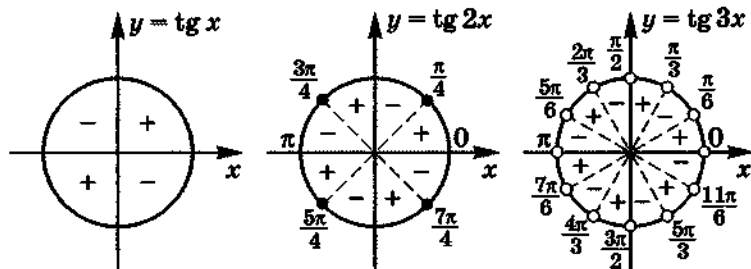
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} > 0; \quad \frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} > 0;$$

$$\sin 3x \cdot \left(\frac{\cos 3x - \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} \right) > 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{\cos 3x - \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)}{\cos x \cdot \cos 2x} > 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{\cos 3x - \cos x}{2 \cos x \cdot \cos 2x} > 0; \quad \operatorname{tg} 3x \cdot \frac{-2 \sin 2x \cdot \sin x}{2 \cos x \cdot \cos 2x} > 0;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x < 0; \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 & x = \pi k \\ \operatorname{tg} 2x = 0 & x = \frac{\pi}{2} t \\ \operatorname{tg} 3x = 0 & x = \frac{\pi}{3} n \end{cases} \quad | k, t, n \in \mathbb{Z};$$



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{tg} 3x$	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-
$\operatorname{tg} 2x$	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-
$\operatorname{tg} x$	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-
$f(x)$	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \right); \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Решите систему $\begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \cdot \sin y = 0 \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10 \end{cases}$.

Пусть $\sin y = 0$. Тогда $\cos^2 y = 0$; $\sin^2 y = 1$ — ложь.

Следовательно, $\sin y \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{\cos^2 y}{3 \sin y} \\ 21(1 - 2 \sin^2 x) - \cos 2y = 10 \end{cases}; \quad 21 \left(1 - 2 \cdot \frac{\cos^4 y}{9 \sin^2 y} \right) = \cos 2y + 10;$$

$$21 \left(1 - \frac{2 \left(\frac{1 + \cos 2y}{2} \right)^2}{9 \cdot \frac{1 - \cos 2y}{2}} \right) = \cos 2y + 10.$$

Обозначая $t = \cos 2y$, получим $21 \left(1 - \frac{1 + 2t + t^2}{9(1 - t)} \right) = t + 10$;

$$21(9 - 9t - 1 - 2t - t^2) = 9(1 - t)(t + 10);$$

$$21(8 - 11t - t^2) = 9(10 - 9t - t^2);$$

$$4t^2 + 50t - 26 = 0; \quad 2t^2 + 25t - 13 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 104}}{4} = \frac{-25 \pm 27}{4} = \begin{cases} -13 \notin E(\cos x) \\ \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\cos 2y = \frac{1}{2}; \quad 2y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{cases} \cos 2y = \frac{1}{2} \\ 21 \cos 2x - \frac{1}{2} = 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 2y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\pm \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \right) \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

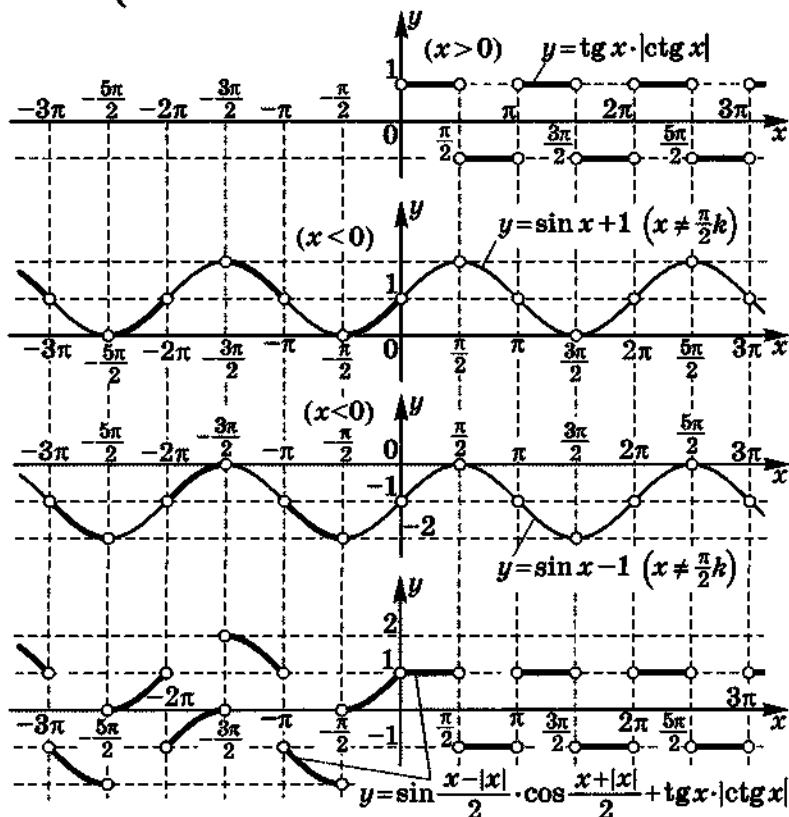
6. Постройте график $y = \sin \frac{x - |x|}{2} \cdot \cos \frac{x + |x|}{2} + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x|$.

а) $x > 0$, тогда $y = 0 + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x| =$

$$= \begin{cases} 1, \operatorname{ctg} x > 0; \frac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k | k \in \mathbb{Z} \text{ и } k \geq 0 \\ -1, \operatorname{ctg} x < 0; \pi + \pi n > x > \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq 0 \end{cases};$$

б) $x < 0$, тогда $y = \sin x + \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{ctg} x| =$

$$= \begin{cases} \sin x + 1, \operatorname{ctg} x > 0; \frac{\pi}{2} + \pi k > x > \pi k | k \in \mathbb{Z} \text{ и } k < 0 \\ \sin x - 1, \operatorname{ctg} x < 0; \pi + \pi n > x > \frac{\pi}{2} + \pi n | n \in \mathbb{Z} \text{ и } n < 0 \end{cases}.$$



10

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Решите простейшие уравнения и неравенства:

Вариант А

Вариант Б

1	$\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$	1	$\cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$
2	$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$	2	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$
3	$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$	3	$\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$
4	$\cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$	4	$\sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$
5	$\sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = 0$	5	$\cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = 0$
6	$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$	6	$\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$
7	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$	7	$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$
8	$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$	8	$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$
9	$\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \leq 0$	9	$\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \leq 0$
10	$\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \geq 0$	10	$\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \geq 0$

Самостоятельная работа 2

Решите уравнение:

Вариант А

1	$2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$
2	$2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$
3	$\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) = 3$
4	$\cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$
5	$2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$
6	$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
7	$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$
8	$8 \cos^2 2x - (6 - 4\sqrt{3}) \cos 2x - 3\sqrt{3} = 0$
9	$\sin^4 x - \cos^4 x = -\frac{1}{2}$
10	$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

Вариант Б

1	$2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$
2	$2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$
3	$\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = -1$
4	$\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$
5	$2 \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = -1$
6	$2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$
7	$\operatorname{ctg}^2 3x + 4 \operatorname{ctg} 3x + 3 = 0$
8	$8 \sin^2 2x - (6 + 4\sqrt{3}) \sin 2x + 3\sqrt{3} = 0$
9	$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x$
10	$\sin^3 x - \cos^3 x = 2(\sin x - \cos x)$

Самостоятельная работа 3

Решите уравнение:

Вариант А

1	$3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$
2	$\sin \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) = \sqrt{3} \cos(1,5 - 3x)$
3	$3 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 2 \sin(x + \pi) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$
4	$4 \sin^2 2x - 2(\sqrt{3} + 1) \sin 2x + \sqrt{3} = 0$
5	$3 \sin^2(\pi - 2x) + \cos^2(2x + \pi) = 3$
6	$6 \cos^2 3x + \sin 3x \cdot \cos 3x - \sin^2 3x = 2$
7	$\frac{\cos 3x}{1 - \sin 3x} = 0$
8	$\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin(x + \pi) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{\cos(2\pi + x) - \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 1}$
9	$2 \operatorname{tg}^2 2x + \frac{1 - (\sin 2x + \cos 2x)^2}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)} = 0$
10	$\frac{2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x}{2 \cos^2 x - \cos x - 1} = 0$

Решите уравнение:

Вариант Б

1	$3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$
2	$\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = \sin(1,5\pi - 2x)$
3	$3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos(x - \pi) + \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 0$
4	$4 \cos^2 3x + 2(\sqrt{3} + 1) \cos 3x + \sqrt{3} = 0$
5	$3 \cos^2(\pi + 2x) + \sin^2(2x - \pi) = 3$
6	$6 \sin^2 3x + \cos 3x \cdot \sin 3x - \cos^2 3x = 2$
7	$\frac{\sin 3x}{1 - \cos 3x} = 0$
8	$\frac{\cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)}{\cos(x - \pi) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \frac{\sin(2\pi - x) - \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 1}$
9	$2 \operatorname{ctg}^2 2x + \frac{1 - (\cos 2x + \sin 2x)^2}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)} = 0$
10	$\frac{2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x}{2 \sin^2 x - \sin x - 1} = 0$

Самостоятельная работа 4**Вариант А**

Докажите тождество:

1	$\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$
2	$1 + \frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$
3	$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^6 \alpha$
4	$\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$
5	$\frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^6 \alpha$

Вычислите:

6	$\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
7	$\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ при $1,5\pi < \alpha < 2\pi$
8	$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha + 2}$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
9	$\frac{2 + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$
10	$\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$

Вариант Б

Докажите тождество:

1	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = -1$
2	$\frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin \alpha}$
3	$\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^6 \alpha$
4	$\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$
5	$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1$

Вычислите:

6	$\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
7	$\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
8	$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \operatorname{ctg} \alpha + 1}{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha + 2}$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
9	$\frac{\cos^2 \alpha + 2}{3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$
10	$\frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$

Самостоятельная работа 5**Вариант А**

Упростите:

1	$\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$
2	$\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$
3	$\frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$
4	$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 + \cos^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - 1)}$
5	$\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) - 1}$
6	$\frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$

Докажите тождество:

7	$\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \cdot \cos^2 \alpha = 1$
8	$\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
9	$\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$
10	$2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) = -1$

Вариант Б

Упростите:

1	$\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$
2	$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$
3	$\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$
4	$\frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{(1 + \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$
5	$\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) - 1}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$
6	$\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cos \alpha}$

Докажите тождество:

7	$\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
8	$\frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$
9	$\frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$
10	$\cos \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \sin \alpha$

Самостоятельная работа 6**Вариант А**

Вычислите:

1	$\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	$\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
3	$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
4	$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
5	$\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$
6	$\frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha - 1}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 1}$, если $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Зная, что $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,5$, вычислите:

7	$\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
8	$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$
9	$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$
10	$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$

Вариант Б

Вычислите:

1	$\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
2	$\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
3	$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
4	$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ при $\pi < \alpha < 1,5\pi$
5	$\frac{2 \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -3$
6	$\frac{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 3 \operatorname{ctg} \alpha + 1}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2 \operatorname{ctg} \alpha - 2}$, если $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Зная, что $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, вычислите:

7	$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
8	$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$
9	$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$
10	$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$

Самостоятельная работа 7

Упростите:

Вариант А

1	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$
2	$\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(2\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$
3	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(2\pi + \alpha)$
4	$\sin(\pi - 2\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \sin(2\alpha - 2\pi) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$
5	$\frac{\sin^2(2\pi + \alpha) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin^2(\pi + \alpha) - \cos^2(\pi - \alpha)}$
6	$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\pi - \alpha) \cdot \sin(2\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha)}$
7	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi)$
8	$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^2(\alpha - \pi)$
9	$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)\right)^2 + 2\sin(\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
10	$\frac{\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(3\pi + \alpha)}$

Упростите:

Вариант Б

1	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$
2	$\frac{\cos(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(2\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$
3	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi - \alpha)$
4	$\cos(\pi - 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \cos(2\pi - 2\alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$
5	$\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos^2(\pi + \alpha) - \sin^2(\pi - \alpha)}$
6	$\frac{\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(\pi + \alpha) \cdot \sin(2\pi - \alpha)}$
7	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 3\pi)$
8	$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2(\pi + \alpha)$
9	$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)\right)^2 + 2\cos(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$
10	$\frac{\cos^2(3\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha) \cdot \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(3\pi + \alpha)}$

Самостоятельная работа 8

Упростите:

Вариант А

1	$\frac{\cos \frac{2\alpha}{5} + \sin \frac{2\alpha}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\alpha}{15}}{\sin \frac{2\alpha}{5} + \cos \frac{2\alpha}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\alpha}{15}}$
2	$\left(\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{8} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{16} + 1 \right)^2 - 1$
3	$\left(1 + \sin \frac{2\pi}{7} \right) : \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \right)^2$
4	$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
5	$\frac{2 \sin 1 - \sin 2}{2 \sin 1 + \sin 2} \cdot 4 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}$
6	$\frac{5 \operatorname{tg} 3}{4 \operatorname{tg} 1} - \frac{3 + \operatorname{tg}^2 1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 1}$
7	$\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{13\pi}{10}$
8	$\sin 40^\circ + 2 \sin 20^\circ - \sqrt{3} \cos 40^\circ$
9	$\frac{\operatorname{ctg}^4 \frac{\alpha}{2} \left(\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \alpha - 4 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$
10	$\frac{\sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{4\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{3\pi}{10}}{\sin \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{11\pi}{28} - \cos \frac{8\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{28}}$

Упростите:

Вариант В

1	$\frac{\cos \frac{4\alpha}{3} + \sin \frac{4\alpha}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{7\alpha}{15}}{\sin \frac{2\alpha}{5} - \cos \frac{2\alpha}{5} \cdot \operatorname{ctg} \frac{7\alpha}{15}}$
2	$\left(\operatorname{ctg} \frac{5\alpha}{12} - \operatorname{ctg} \frac{5\alpha}{6} \right)^2 - 1$
3	$\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \alpha}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$
4	$4 \cos^4 \alpha - \sin^2 2\alpha - \cos 4\alpha - 2 \cos 2\alpha$
5	$\frac{2}{\sin 1} - \frac{2}{\sin 3} - \frac{4 \cos 2}{\sin 3}$
6	$\frac{1 - \sin^6 4 - \cos^6 4}{1 - \sin^4 4 - \cos^4 4}$
7	$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{18}}$
8	$\cos^2 85^\circ + \sin 115^\circ \cdot \sin 55^\circ$
9	$\frac{\sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \alpha}$
10	$\frac{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{21} - \cos \frac{17\pi}{21} \cdot \cos \frac{8\pi}{7}}{\cos \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} + \cos \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{25\pi}{24}}$

Самостоятельная работа 9

Упростите:

Вариант А

1	$\frac{1 + \sin 6\alpha - \cos 6\alpha}{1 + \sin 6\alpha + \cos 6\alpha}$
2	$\frac{4 \sin \frac{\alpha}{4} \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{4} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{4}}{\sin \alpha}$
3	$\frac{4 \sin^4 (\sqrt{2}\alpha) + \sin^2 (2\sqrt{2}\alpha)}{1 - \cos^2 (\sqrt{2}\alpha)}$
4	$\frac{1 - 2 \sin 3 - \cos 6}{1 + 2 \sin 3 - \cos 6}$
5	$\cos 47^\circ \cdot \cos 73^\circ + \cos^2 77^\circ - 2$
6	$\frac{\operatorname{ctg} 75^\circ - \operatorname{tg} 75^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}$
7	$\frac{\sin 47^\circ + \sin 48^\circ + \sqrt{2} \sin 87^\circ}{\sqrt{2} \cos 3^\circ}$
8	$\frac{\cos 54^\circ + \cos 50^\circ + \cos 46^\circ + \cos 42^\circ}{2 \cos 2^\circ \cdot \sin 86^\circ \cdot 48^\circ}$
9	$\frac{\cos 70^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 150^\circ}{\cos 69^\circ \cdot \sin 81^\circ + \sin 69^\circ \cdot \sin 9^\circ}$
10	$\operatorname{ctg}^6 70^\circ - 33 \operatorname{ctg}^4 70^\circ + 27 \operatorname{ctg}^2 70^\circ$

Упростите:

Вариант Б

1	$\frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 \sin \alpha - \cos \alpha}$
2	$\frac{4 \sin \frac{\alpha}{5} \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{5} - 4 \cos \frac{\alpha}{5} \cdot \sin^3 \frac{\alpha}{5}}{\sin \frac{4\alpha}{5}}$
3	$\frac{1 - \cos^2 \frac{\sqrt{2}}{6}}{4 \sin^4 \frac{\sqrt{2}}{6} + \sin^2 \frac{\sqrt{2}}{3}}$
4	$\frac{1 + 2 \cos 3 + \cos 6}{1 - 2 \cos 3 + \cos 6}$
5	$\operatorname{ctg} 83^\circ \cdot \left(\frac{1}{\cos 76^\circ} + \frac{1}{\operatorname{ctg} 76^\circ} \right)$
6	$\sin^2 67^\circ + \sin^2 7^\circ \cdot \cos^2 53^\circ + 3$
7	$\frac{2 \cos 201^\circ - 16 \sin 111^\circ}{\cos 21^\circ}$
8	$\frac{5 \sin 27^\circ + 2 \cos 63^\circ - 4 \cos 153^\circ}{\cos 75^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 15^\circ \cdot \cos 78^\circ}$
9	$\frac{4 \cos 55^\circ - 3 \sin 35^\circ + 2 \cos 35^\circ}{\sin 73^\circ \cdot \sin 72^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 18^\circ}$
10	$\operatorname{ctg}^2 54^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 18^\circ$

Самостоятельная работа 10

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\sin 2x = 3 \cos^2 x$
2	$2 \cos^2 x = 1 + 4 \sin x$
3	$2 \cos 2x + 2 \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x$
4	$\sin 2x + 2 \sin x - 3 \cos x = 3$
5	$2 \cos x + \cos 2x = 2 \sin x$
6	$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$
7	$2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$
8	$8 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \sqrt{3}$
9	$\sin x + \cos x = \sin^3 x$
10	$\cos^4 \frac{3x}{2} - \sin^4 \frac{3x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Решите уравнение:

Вариант Б

1	$\sin^4 x + \cos^4 x = 0,5$
2	$\sin^3 x \cdot \cos x + \cos^3 x \cdot \sin x = \cos 2x$
3	$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \sin^2 x$
4	$4 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \cos 4x$
5	$2 + \cos^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x = \sin^2 x$
6	$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$
7	$2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 2x$
8	$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
9	$\sin 3x + \cos 7x = 0$
10	$\sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$

Самостоятельная работа 11

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\sin 4x + \sin^2 2x = 0$
2	$\sin 3x = 3 \sin x \cdot \cos^2 x$
3	$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2$
4	$5 \sin x + \cos x = 5$
5	$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$
6	$\sin 2x + 3 = 3 \sin x + 3 \cos x$
7	$\cos x \cdot \sin 9x = \cos 3x \cdot \sin 7x$
8	$2 \cos^2 2x + 3 \sin 4x + 4 \sin^2 2x = 0$
9	$\sin 4x = 6 \cos^2 2x - 4$
10	$2 \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^3 2x = 1$

Вариант Б

1	$\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 + 4 \sin x$
2	$\sin x \cdot \sin 5x = 1$
3	$\sin^2 x - \cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{4}$
4	$\sin 3x = 3 \sin x$
5	$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$
6	$4 \cos^4 x = 11 \cos 2x - 1$
7	$\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sqrt{3} \sin x$
8	$2 \sin (40^\circ + x) \cdot \sin (50^\circ - x) = -1$
9	$4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x$
10	$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$

Самостоятельная работа 12

Решите уравнение:

Вариант А

1	$\cos 2x + \cos 6x + 2 \sin^2 x = 1$
2	$\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$
3	$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$
4	$144 \cos^4 x - 4 \sin^4 x = 9 \sin^2 2x$
5	$\cos 7x + \cos x = 2 \cos 3x \cdot (\sin 2x + 1)$
6	$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$
7	$\sin 5x = \sin x + \sin 2x$
8	$2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$
9	$\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos x$
10	$\sqrt{5} \sin 2x = \sqrt{1 + 8 \sin x \cdot \cos x}$

Вариант Б

1	$2 \sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$
2	$4 \cos x \cdot \sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$
3	$\cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x$
4	$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1,5$
5	$2(\cos 4x - \sin x \cdot \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$
6	$5 \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$
7	$9 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin^2 x = 6$
8	$(\cos 6x - 1) \operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$
9	$\sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x$
10	$\sqrt{10} \cos x = \sqrt{4 \cos x - \cos 2x}$

Самостоятельная работа 13

Вычислите:

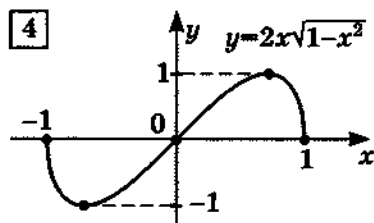
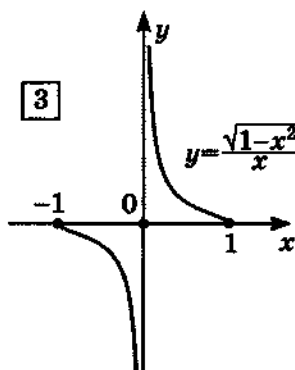
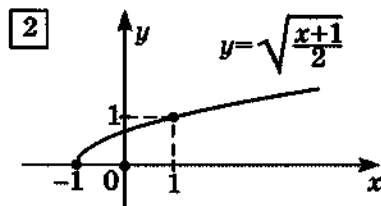
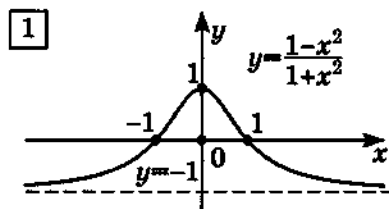
Вариант А**Вариант Б**

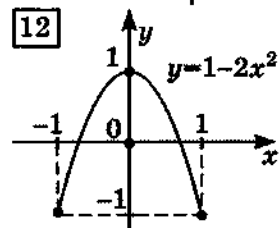
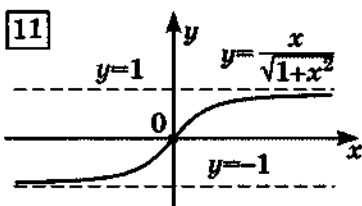
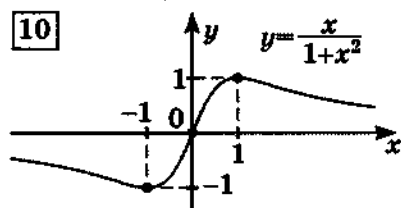
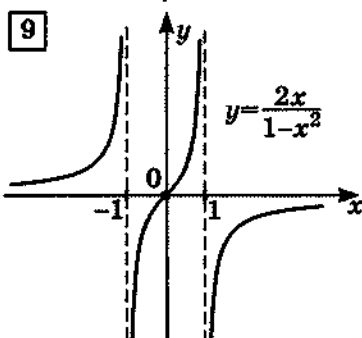
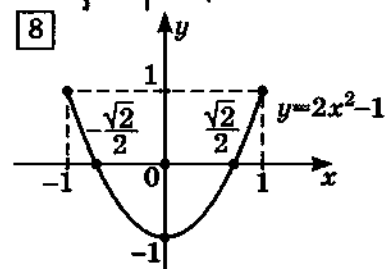
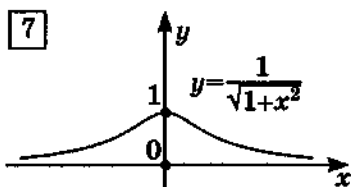
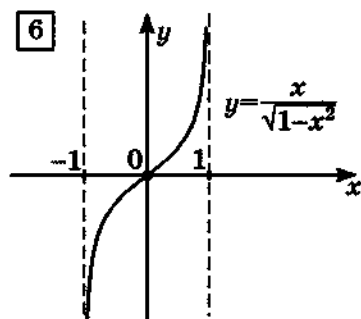
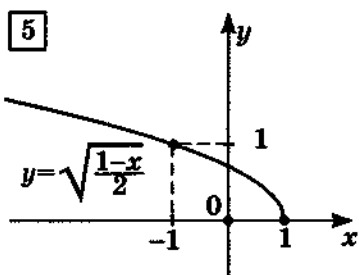
1	$\arccos\left(\cos\frac{17\pi}{5}\right)$	1	$\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{5}\right)$
2	$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$	2	$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5}\right)$
3	$\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$	3	$\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right)$
4	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-3,2\pi))$	4	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2,7\pi))$
5	$\sin(\operatorname{arctg} 2)$	5	$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$
6	$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$	6	$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$
7	$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$	7	$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos(0,1)\right)$
8	$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$	8	$\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$
9	$\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(\frac{12}{13}\right)\right)$	9	$\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{15}{17}\right)$
10	$\cos(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}))$	10	$\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

Самостоятельная работа 14

Укажите номер графика соответствующий каждой из данных функций

1	$y = \sin(2 \arcsin x)$
2	$y = \cos(2 \arcsin x)$
3	$y = \cos(2 \arccos x)$
4	$y = \sin(2 \operatorname{arctg} x)$
5	$y = \cos(2 \operatorname{arctg} x)$
6	$y = \sin(\operatorname{arctg} x)$
7	$y = \cos(\operatorname{arctg} x)$
8	$y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$
9	$y = \operatorname{tg}(\arccos x)$
10	$y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x)$
11	$y = \cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$
12	$y = \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$





Самостоятельная работа 15

Решите системы уравнений:

Вариант А

Вариант Б

1	$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$	1	$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1 \\ \sin y - \cos x = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4y + \sqrt{3} \cos x = -\frac{1}{2} \\ 28y + 3\sqrt{3} \cos x = 1 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x - 8y = -1 \\ \sqrt{3} \sin x - 7y = \frac{1}{4} \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$	4	$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \cos 2x + 2 \cos y = 1 \end{cases}$	5	$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$	6	$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \frac{3}{4} \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1 \\ \cos^2 x + \cos y = 1 \end{cases}$	7	$\begin{cases} \sin^2 x - \cos y = 1 \\ \cos^2 x - \sin y = 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{\sin x} \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$	8	$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{\cos x} \\ \cos x + \cos y = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$

Самостоятельная работа 16**Вариант А**

Вычислите:

1	$\cos 26^\circ + \cos 98^\circ + \cos 170^\circ + \cos 242^\circ + \cos 314^\circ$
2	$2 \cos 80^\circ + \frac{1}{2 \cos 40^\circ}$
3	$\operatorname{arccctg}(\operatorname{tg} 9)$
4	$\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3)$

Что больше?

5	$a = \sin 40^\circ + \sin 51^\circ$ или $b = \sin 48^\circ + \sin 52^\circ$
---	---

Найдите основной период:

6	$y = 4^{\cos \frac{x}{4}} + 3^{\sin \frac{x}{3}}$
---	---

Решите уравнения:

7	$16 \sin \left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = 9 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3} + 5 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3}$, если $12 \leq x \leq 18$
8	$\arcsin \frac{3x}{5} + \arcsin \frac{4x}{5} = \arcsin x$

Найдите целые решения и их число:

9	$\arccos \frac{x}{3} > \arcsin \frac{x}{3}$
---	---

Решите неравенство:

10	$\left(\cos \pi x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\cos \pi x + \frac{\sqrt{3}}{2}} \geq 0$, если $0 \leq x \leq 2$
----	--

Вариант Б

Вычислите:

1	$\frac{6\sqrt{3} \sin 100^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 110^\circ + \sin 60^\circ}$
2	$\cos 100^\circ + \sin 70^\circ + \cos 140^\circ$
3	$\arcsin(\sin 28)$
4	$\sin\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{15}{17}\right)$

Что больше?

5	$a = \sin(\cos 26^\circ)$ или $b = \cos(\sin 26^\circ)$
---	---

Найдите основной период:

6	$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos \frac{\pi}{3}}}$
---	---

Решите уравнения:

7	$16 \cos\left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 9 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} + 5 \operatorname{tg} \frac{11x}{4},$ если $17 \leq x \leq 26$
8	$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}$

Найдите целые решения и их число:

9	$\arccos \frac{x}{2} > \operatorname{arctg} x$
---	--

Решите неравенство:

10	$\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\sin \pi x - \frac{\sqrt{3}}{2}} \geq 0, \text{ если } 0,5 \leq x \leq 2,5$
----	--

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

А

Б

1	$\frac{\pi k}{2}$	1	$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$
2	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$	2	$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$
3	$-\frac{\pi}{12} + \pi k$	3	$-\frac{\pi}{3} + \pi k$
4	$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$	4	$-\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$
5	$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$	5	$\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$
6	$\frac{3\pi}{8} + \pi k$	6	$\frac{5\pi}{8} + \pi k$
7	$\left[-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k\right]$	7	$\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$
8	$\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)$	8	$\left(-\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)$
9	$\left[\frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{8\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right]$	9	$\left[\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\right]$
10	$\left[-\frac{5\pi}{8} + \pi k; -\frac{\pi}{8} + \pi k\right]$	10	$\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right]$

Самостоятельная работа 2

А		Б	
1	$\pm \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \pi k$	1	$-\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k$
2	$\frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k$	2	$\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$
3	$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k$	3	$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k$
4	$\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k$	4	$\frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$
5	$-\frac{\pi}{12} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k$	5	$\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$
6	$2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$	6	$-\frac{\pi}{4} + \pi k; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$
7	$-\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $\arctg 4 + \pi n$	7	$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k;$ $-\frac{1}{3} \arctg 3 + \frac{\pi}{3}n$
8	$\pm \frac{5\pi}{12};$ $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + \pi n$	8	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k;$ $\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}n$
9	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$	9	$\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
10	$-\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$ $\pi + 2\pi m$	10	$\frac{\pi}{4} + \pi k$

Самостоятельная работа 3

А

В

1	$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k$	1	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$
2	$-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$	2	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$
3	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	3	$2\pi k$
4	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k;$ $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$	4	$\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k;$ $\pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n$
5	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$	5	$\frac{\pi}{2}k$
6	$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k;$ $\frac{1}{3} \arctg \frac{4}{3} + \frac{\pi}{3}n$	6	$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k;$ $\frac{1}{3} \arctg \frac{3}{4} + \frac{\pi}{3}n$
7	$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$	7	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$
8	$\emptyset$	8	$\pm \frac{1}{2} \arccos(\sqrt{5} - 2) + \pi k$
9	$\forall x \neq \frac{\pi}{4}n$	9	$\forall x \neq \frac{\pi}{4}k$
10	$\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad \pi + 2\pi n$	10	$\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

Самостоятельная
работа 4

	А	В
6	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$
7	$-3\frac{3}{7}$	$-1\frac{7}{8}$
8	$4\frac{5}{14}$	$4\frac{5}{14}$
9	2,3	2,1
10	$1\frac{1}{137}$	$1\frac{152}{185}$

Самостоятельная
работа 5

	А	В
1	$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$
2	1	1
3	$\sin \alpha - \cos \alpha$	$\sin \alpha + \cos \alpha$
4	-1	1
5	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
6	1	1

Самостоятельная
работа 6

	А	В
1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\sqrt{\frac{13}{3}}$	$\frac{1}{4}$ $-\frac{\sqrt{15}}{15}$
3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$
4	$-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$
5	$\frac{2}{7}$	-7
6	$-\frac{86}{189}$	$\frac{7}{18}$
7	$-\frac{3}{8}$	$\frac{8}{9}$
8	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{27}$
9	$\frac{23}{32}$	$\frac{49}{81}$
10	$\frac{37}{64}$	$\frac{33}{81}$

Самостоятельная работа 7

А		Б	
1	1	1	-1
2	1	2	1
3	1	3	-1
4	0	4	0
5	$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$	5	$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$
6	$\operatorname{ctg} \alpha$	6	$-\operatorname{tg} \alpha$
7	-1	7	-1
8	1	8	1
9	1	9	1
10	$-\sin \alpha$	10	$-\cos \alpha$

Самостоятельная
работа 8

А	Б
1 $\operatorname{ctg} \left(\frac{2\alpha}{15} \right)$	$-\operatorname{tg} \left(\frac{7\alpha}{15} \right)$
2 $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{3\alpha}{8} \right)$	$\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{5\alpha}{6} \right)$
3 1	$\frac{1}{4}$
4 0	1
5 4	0
6 0,75	1,5
7 -0,5	4
8 0	0,75
9 1	1
10 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Самостоятельная
работа 9

А	Б
1 $\operatorname{tg} 3\alpha$	$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$
2 1	1
3 4	$\frac{1}{4}$
4 $-\operatorname{ctg}^2 \left(1,5 + \frac{\pi}{4} \right)$	$-\operatorname{ctg} 1,5$
5 -1,75	1
6 -2	4,5
7 2	-18
8 2	11
9 $\frac{1}{2}$	-9
10 3	5

Самостоятельная работа 10

А

В

1	$\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} 1,5 + \pi n$	1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$
2	$(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{6}-2}{2} + \pi k$	2	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$	3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$
4	$\pi + 2\pi k$	4	$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k$
5	$\frac{\pi}{4} + \pi k$	5	$-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$
6	$2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	6	$\frac{\pi}{8} k$
7	$\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$	7	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k$
8	$(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} k$	8	$\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + 2\pi n; \frac{2\pi}{5} m$
9	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	9	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k; \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n$
10	$\pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k$	10	$\frac{\pi}{4} + \pi k$

Самостоятельная работа 11

А

Б

1	$\frac{\pi}{2}k; -\frac{1}{2}\arctg 2 + \frac{\pi}{2}n$	1	πk
2	πk	2	$\frac{\pi}{2} + \pi k$
3	$\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$	3	$\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$
4	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\arctg \frac{3}{5} + 2\pi n$	4	πk
5	$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n$	5	$\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi}{4}k; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}n$
6	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi n$	6	$\pm \arccos \frac{9 - \sqrt{73}}{2} + \pi n$
7	$\frac{\pi}{4}k; \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$	7	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k; -\frac{\pi}{12} + \pi n$
8	$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k;$ $-\frac{1}{2}\arctg 2 + \frac{\pi}{2}n$	8	$\frac{19}{36}\pi + \pi k$
9	$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k;$ $\frac{1}{2}\arctg \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}n$	9	$\frac{\pi}{3}k$, где $k \not\equiv 3$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
10	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$	10	$\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$

Самостоятельная работа 12

А		Б	
1	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k$	1	$\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$
2	$\frac{\pi}{2} + \pi k$	2	$\emptyset$
3	$\frac{\pi}{2} + \pi k;$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}t;$ $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$	3	$\frac{\pi}{2}k$
4	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$	4	$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}k;$ $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$
5	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k;$ $\pi n;$ $(-1)^{t+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}t$	5	$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k$
6	$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k;$ $\frac{\pi}{12} + \pi n$	6	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
7	$\frac{\pi}{2}k;$ $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n$	7	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$
8	$\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$	8	$\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$
9	$\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k;$ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$	9	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;$ $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}n$
10	$\frac{\pi}{4} + \pi k$	10	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

Самостоятельная
работа 13

А

1	$0,6\pi$
2	$0,6\pi$
3	$-0,2\pi$
4	$-0,2\pi$
5	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$
6	$0,6$
7	$\frac{2}{3}$
8	$\frac{3}{4}$
9	$2,4$
10	$\frac{1}{3}$

Б

1	$0,6\pi$
2	$\frac{4\pi}{5}$
3	$-\frac{3\pi}{7}$
4	$-0,3\pi$
5	$\frac{3}{5}$
6	$\frac{12}{13}$
7	$0,3\sqrt{5}$
8	$-\frac{4}{3}$
9	$\frac{15}{8}$
10	$\frac{12}{13}$

Самостоятельная
работа 14

1	4
2	12
3	8
4	10
5	1
6	11
7	7
8	6
9	3
10	9
11	2
12	5

Самостоятельная работа 15

А

1	$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -\pi k \right) \middle k \in \mathbb{Z} \right\}$
2	$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi n \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
3	$\left\{ \left(\pm \left(\pi - \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + 2\pi k; \frac{5}{32} \right) \middle k \in \mathbb{Z} \right\}$
4	$\left\{ \left(\pm \frac{\pi}{3} + (n+k)\pi; \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n-k) \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
5	$\left\{ \left(\pm \frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
6	$\left\{ \begin{array}{l} \left(\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \\ \left(\pi n + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right) \end{array} \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
7	$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi n \right); \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
8	$\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4k-n) \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$

В

1	$\left\{ \left(\pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \middle k \in \mathbb{Z} \right\}$
2	$\left\{ \left((-1)^k \frac{\pi}{8} + (k+n) \frac{\pi}{2}; (-1)^k \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}(k-n) \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
3	$\left\{ \left((-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6} + \pi k; -\frac{1}{4} \right) \middle k \in \mathbb{Z} \right\}$
4	$\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k+n); \right. \right.$ $\left. \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+2} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2k-n) \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
5	$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
6	$\left\{ \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k \right); \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}; 2\pi k + \pi \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
7	$\left\{ (\pi n; (2k+1)\pi); \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
8	$\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + (n+2k)\pi \right) \middle k, n \in \mathbb{Z} \right\}$

Самостоятельная работа 16

А

Б

1	0	1	3
2	1	2	0
3	$3,5\pi - 9$	3	$9\pi - 28$
4	0,36	4	0,48
5	$a > b$	5	$a < b$
6	24π	6	12π
7	12,5; 14,5	7	$17\frac{1}{3}; 22\frac{2}{3}; 25\frac{1}{3}$
8	-1; 0; 1	8	$\frac{2}{3}$
9	-3; -2; -1; 0; 1; 2 (шесть решений)	9	-2; -1; 0; 1 (четыре решения)
10	$\left\{1\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right\}; \left[0; \frac{2}{3}\right]; \left[1\frac{1}{3}; 2\right]$	10	$\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[2\frac{1}{3}; 2,5\right]$

Тригонометрические формулы

1. Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$1.1 \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$1.4 \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$1.2 \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$1.5 \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$1.3 \quad \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

$$1.6 \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

$$1.7 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$1.10 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$1.8 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

$$1.11 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

$$1.9 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$1.12 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

2. Решение простейших уравнений

$$2.1 \quad \cos x = m \Rightarrow x = \pm \arccos m + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$2.2 \quad \sin x = m \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$2.3 \quad \operatorname{tg} x = m \Rightarrow x = \arctg m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$2.4 \quad \operatorname{ctg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arccctg} m + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$$

3. Формулы приведения

$$3.1 \quad \cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$3.2 \quad \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$3.3 \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$3.4 \quad \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$

$$3.5 \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

- | | | |
|------|---|---|
| 3.6 | $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| 3.7 | $\operatorname{ctg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.8 | $\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.9 | $\operatorname{tg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.10 | $\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.11 | $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.12 | $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.13 | $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$ | $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ |
| 3.14 | $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$ | $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ |
| 3.15 | $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$ | $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ |
| 3.16 | $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha$ | $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$ |
| 3.17 | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ |
| 3.18 | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ |
| 3.19 | $\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.20 | $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.21 | $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.22 | $\operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.23 | $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ | $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ |
| 3.24 | $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ |
| 3.25 | $\cos(\alpha + 270^\circ) = \sin \alpha$ | $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin \alpha$ |
| 3.26 | $\cos(\alpha - 270^\circ) = -\sin \alpha$ | $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$ |
| 3.27 | $\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$ | $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$ |
| 3.28 | $\sin(\alpha - 270^\circ) = \cos \alpha$ | $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \alpha$ |
| 3.29 | $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$ |

$$3.39 \quad \sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$3.31 \quad \operatorname{ctg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$3.32 \quad \operatorname{ctg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$3.33 \quad \operatorname{tg}(\alpha + 270^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$3.34 \quad \operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$3.35 \quad \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$3.36 \quad \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

4. Теоремы сложения

$$4.1 \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$4.2 \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$4.3 \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$4.4 \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$4.5 \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{array} \right. \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}$$

$$4.6 \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi t \end{array} \right. \quad | k, n, t \in \mathbb{Z}$$

5. Функции двойного и половинного угла

$$5.1 \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$5.2 \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$5.3 \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}$$

$$5.4 \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}$$

$$5.5 \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z}$$

$$5.6 \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} k | k \in \mathbb{Z}$$

$$5.7 \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$5.8 \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$5.9 \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$5.10 \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

6. Функции тройного угла

$$6.1 \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$6.2 \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$6.3 \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k | k \in \mathbb{Z}$$

$$6.4 \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{3} k | k \in \mathbb{Z}$$

7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

$$7.1 \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$7.2 \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$7.3 \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$7.4 \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$7.5 \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases} \\ \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \text{ при } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \beta \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7.6 \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \text{ при } \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0 \end{cases} \\ \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \text{ при } \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \beta \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7.7 \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$7.8 \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$7.9 \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$7.10 \quad \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7.11 \quad \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7.12 \quad A \sin \alpha + B \cos \alpha =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \right) & \text{если } B > 0 \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{A}{B} \right) & \text{если } B < 0 \\ \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right) & \text{если } A > 0 \\ -\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right) & \text{если } A < 0 \end{cases}$$

8. Свойства арс-функций

$$8.1 \quad \arccos(-m) = \pi - \arccos m \quad \arccos m \in [0; \pi]$$

$$8.2 \quad \arcsin(-m) = -\arcsin m \quad \arcsin m \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$8.3 \quad \operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m \quad \operatorname{arctg} m \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8.4 \quad \operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m \quad \operatorname{arcctg} m \in (0; \pi)$$

$$8.5 \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$8.6 \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$8.7 \quad \arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$8.8 \quad \arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$8.9 \quad \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$8.10 \quad \arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$8.11 \quad \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$8.12 \quad \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$8.13 \quad \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0 \end{cases}$$

9. Тригонометрические функции от арг-функций

$$9.1 \quad \sin(\arcsin x) = x \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$9.2 \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$9.3 \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.4 \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.5 \quad \cos(\arccos x) = x \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$9.6 \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$9.7 \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.8 \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.9 \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.10 \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$9.11 \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

$$9.12 \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \begin{array}{l} -1 \leq x < 0; \\ 0 < x \leq 1 \end{array}$$

$$9.13 \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad -\infty < x < \infty$$

$$9.14 \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$9.15 \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \begin{array}{l} -1 \leq x < 0; \\ 0 < x \leq 1 \end{array}$$

$$9.16 \quad \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$$

Содержание

Программы элективных курсов	5
Программа элективного курса №1	5
Программа элективного курса №2.	6
1. Определение основных тригонометрических функций	7
Введение	7
2. Вычисление значений тригонометрических функций любого угла	22
Таблица некоторых значений тригонометрических функций	22
Практикум 1	25
Практикум 2	35
Тренировочная работа 1.	39
Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла	43
Практикум 3	45
Тренировочная работа 2.	49
Практикум 4	53
Тренировочная работа 3.	57
Тренировочная работа 4.	62
3. Решение простейших уравнений	69
Уравнение вида $\cos x = m$	69
Уравнение вида $\sin x = m$	72
Уравнение вида $\operatorname{tg} x = m$	75
Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = m$	77
Практикум 5	79
4. Основные тригонометрические формулы	89
Формулы приведения	89
Практикум 6	91
Тренировочная работа 5.	105
Теоремы сложения	116
Практикум 7	116
Тренировочная работа 6.	125

Тригонометрические функции двойного и половинного угла	135
Практикум 8	136
Тренировочная работа 7	144
Тренировочная работа 8	152
Тренировочная работа 9	159
Тренировочная работа 10	163
Тренировочная работа 11	170
Тренировочная работа 12	180
Тренировочная работа 13	183
Тренировочная работа 14	191
Проверочная работа 1	196
Тренировочная работа 15	202
Проверочная работа 2	212
5. Суммы и произведения тригонометрических функций	222
Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот	222
Практикум 9	224
Тренировочная работа 16	238
Практикум 10	249
Периодические функции	263
Практикум 11	270
6. Обратные тригонометрические функции и их графики	286
Арксинус	287
Арккосинус	289
Арктангенс	291
Арккотангенс	294
Практикум 12	297
Свойства аргс-функций и некоторые соотношения между ними	300
Тригонометрические функции от аргс-функций	301
Практикум 13	302
Практикум 14	305
Тренировочная работа 17	312

Графики аргс-функций	322
Практикум 15	327
Тренировочная работа 18	342
Практикум 16 (Решение тригонометрических неравенств)	353
Тренировочная работа 19	368
Системы тригонометрических уравнений	390
Практикум 17	390
Практикум 18	398
7. Тренировочные карточки	406
Карточка 1	406..425
Карточка 2	408..431
Карточка 3	410..436
Карточка 4	412..441
Карточка 5	413..446
Карточка 6	414..450
Карточка 7	415..454
Карточка 8	416..458
Карточка 9	417..462
Карточка 10	418..468
Карточка 11	419..473
Карточка 12	420..478
Карточка 13	421..483
Карточка 14	422..491
Карточка 15	423..498
Карточка 16	424..505
8. Зачетные карточки	513
Карточка 1	513..531
Карточка 2	514..535
Карточка 3	516..539
Карточка 4	517..543
Карточка 5	519..547
Карточка 6	520..550
Карточка 7	521..554
Карточка 8	522..558
Карточка 9	523..561

Карточка 10	524 . . . 568
Карточка 11	525 . . 570
Карточка 12	526 . . 574
Карточка 13	527 . . 579
Карточка 14	528 . . 586
Карточка 15	529 . . 595
Карточка 16	530 . . 606
9. Итоговые карточки	615
Карточка 1	615 . . 626
Карточка 2	617 . . 635
Карточка 3	618 . . 640
Карточка 4	619 . . 647
Карточка 5	620 . . 655
Карточка 6	621 . . 661
Карточка 7	622 . . 667
Карточка 8	623 . . 677
Карточка 9	624 . . 685
Карточка 10	625 . . 692
10. Самостоятельные работы	701
Самостоятельная работа 1	701 . . 727
Самостоятельная работа 2	702 . . 728
Самостоятельная работа 3	703 . . 729
Самостоятельная работа 4	705 . . 730
Самостоятельная работа 5	707 . . 730
Самостоятельная работа 6	709 . . 730
Самостоятельная работа 7	711 . . 731
Самостоятельная работа 8	713 . . 731
Самостоятельная работа 9	715 . . 731
Самостоятельная работа 10	717 . . 732
Самостоятельная работа 11	719 . . 733
Самостоятельная работа 12	720 . . 734
Самостоятельная работа 13	721 . . 735
Самостоятельная работа 14	722 . . 735
Самостоятельная работа 15	724 . . 736
Самостоятельная работа 16	725 . . 738

Тригонометрические формулы 739

1. Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла 739
2. Решение простейших уравнений 739
3. Формулы приведения. 739
4. Теоремы сложения 741
5. Функции двойного и половинного угла 742
6. Функции тройного угла 742
7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот 743
8. Свойства аргс-функций 744
9. Тригонометрические функции от аргс-функций 745

Учебное издание

**Шахмейстер Александр Хаймович
ТРИГОНОМЕТРИЯ**

Научный редактор серии *А. В. Семенов*

Художник *Е. И. Герасимчук*

Компьютерный набор *К. В. Шевяков, И. В. Малинин*

Компьютерный набор и верстка *С. С. Афонин*

Компьютерная графика *А. С. Широкий*

Корректоры *Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

Тел.: (812) 943-8076; e-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 241-7285; e-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Подписано в печать 10.02.2013. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Печ. л. 47. Тираж 1000 экз. (По требованию)

Заказ № Пет-015.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с диапозитивов, предоставленных издательством

«Петроглиф», в типографии Издательского дома КДУ.

119234, Москва, а/я 587. Тел./факс (495) 638-57-34;

e-mail: kdu@kdu.ru; www.kdu.ru.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА • ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами на экзаменах.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.
15. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
16. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-906226-15-0

